

ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK

34. Band, Heft 1/3

5. Juli 1950

S. 1—144

Grundlagenfragen. Philosophie. Logik.

• **Hispani, Petri:** *Summulae logicales.* (A cura di I. M. Bocheński O. P.). Torino: Domus Editorialis Marietti — S. Sedis Apostolicae et S. Rituum Congreg. Typographi 1947.

• **Naess, Arne:** *Symbolic logic.* 2. ed., mimeographed. (Filosofiske problemer no. 10). Oslo: Universitetets Studentkontor 1948. IV, 192 p. (with 2 separate p. of errata) [Norwegisch].

• **Jørgensen, Jørgen:** *The development of logical empiricism.* Copenhagen: Ejnar Munksgaard 1948. 97 p. [Dänisch].

• **Żukowski, Eugeniusz:** *Quelques ordres dans les propositions disjonctives et équivalentes. (Un fragment d'algèbre de la logique).* *Roczniki filozoficzne* 1, 191—197 und franz. Zusammenfassg. 323—324 (1948) [Polnisch].

• **Bourbaki, N.:** *Foundations of mathematics for the working mathematician.* *J. symbolic Logic* 14, 1—8 (1949).

In diesem Vortrag nimmt der Urheber des bekannten französischen Sammelwerks „*Éléments de Mathématiques*“ Stellung zu einigen Grundlagenfragen: Logik ist die Grammatik der mathematischen Sprache, und zwar einer Sprache, die — mit allen Schwächen — vorliegen muß, bevor ihre Grammatik aufgebaut werden kann. Die an Hand von anerkannt korrekten mathematischen Texten entwickelte Logik kann normativen Wert bekommen, indem sie dem Mathematiker erlaubt, sich zu präzisieren; sie darf aber nicht versuchen, ihn „auf ein ausgefeiltes und nutzloses Ritual festzulegen“. Deshalb steht auch fest, daß „selbst in den bestbegründetsten Zweigen unserer Wissenschaft ein ungeschickter oder zu geschickter Gebrauch der vorhandenen Terminologie zu Mehrdeutigkeiten und eventuell zu Widersprüchen führen kann“. — Abschließend wird eine Axiomatisierung der Mengenlehre skizziert, die nur den Anforderungen des Standpunktes des Verf. genügen und als Grundlage seiner mathematischen Arbeiten gelten soll. — Auf die naheliegende Frage, was vom Standpunkt der Grundlagenforschung hierzu zu sagen ist, kann hier nicht eingegangen werden.

G. Hasenjaeger (Münster).

• **Carnap, R.:** *Meaning and necessity. A study in semantics and modal logic.* Chicago: The University of Chicago Press, 1947. VIII, 210 p.

Das Hauptthema dieser Monographie ist die Konstruktion einer neuen Methode der semantischen Analysis von sprachlichen Ausdrücken. Als wichtigste Vorstufe ist anzusehen die bahnbrechende Fregesche Studie über Sinn und Bedeutung [*Z. Philos. u. philos. Kritik* 100, 25—50 (1892)]. Die deutschsprachlichen Wortverbindungen „der Morgenstern“ und „der Abendstern“ bezeichnen denselben Gegenstand, aber auf zwei wesentlich voneinander verschiedene Arten. Frege sagt: sie sind sinnverschieden, aber bedeutungsgleich. Die Bedeutung eines Eigennamens ist der durch ihn bezeichnete Gegenstand. Auf dieser Basis hat Frege eine Semantik der Aussagen aufgebaut, die nicht nur für die Matrizenlogik grundlegend geworden ist, sondern, im Zusammenhang mit seiner eben so originalen Interpretation der Begriffe als logischer Funktionen (Abbildungen der k -tupel eines vorgegebenen nicht-leeren Individuenbereichs in die Menge der Wahrheitswerte des Wahren und des Falschen), für die ganze Theorie der Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit. Er faßt auch die Aussagen als Eigennamen auf, nämlich als Eigennamen für einen der beiden Wahrheitswerte, und nennt zwei Aussagen bedeutungsgleich, wenn sie denselben Wahrheitswert bezeichnen. Bedeutungsgleiche Aussagen können so sinnverschieden sein wie irgend zwei wahre oder irgend zwei falsche Aussagen. Als den Sinn einer Aussage bezeichnet Frege den durch sie ausgedrückten Gedanken (der an einem Bolzanoschen „Satz an sich“ gespiegelt werden kann). — Es scheint mir, daß man zu diesen Fregeschen Festsetzungen drei Desiderate anmelden kann: (1) Sinn und Bedeutung wird nur den Eigennamen zugeschrieben. Dies hat zur Folge, daß die für die Logik so wichtigen Prädikate

bei Frege als solche weder einen Sinn noch eine Bedeutung haben; denn sie sind nicht Eigennamen, sondern, wie die ihnen semantisch zuzuordnenden Begriffe, „ungesättigt“. Sie müssen also erst zu Eigennamen, in diesem Falle zu Aussagen, ergänzt werden, um für Frege einen Sinn und eine Bedeutung zu erlangen. Es liegt nahe zu fragen, ob diese zwar in der funktionalen Auffassung der Begriffe tief verankerte, aber dennoch empfindliche Lücke unvermeidlich ist oder ob sie nicht vielmehr auf einen „Konstruktionsfehler“ hindeutet. (2) Der Sinn eines Eigennamens ist nur für Aussagen erklärt. (3) Die Frage, wann zwei Eigennamen denselben Sinn haben sollen, bleibt auch für die Aussagen unbeantwortet. — Carnap macht einen neuen Anlauf zu einer Semantik im Fregeschen Sinne, nachdem der profunde Gehalt dieser Semantik auch von den transatlantischen Logikern (Church, Quine) mehr und mehr erkannt worden ist. Er knüpft aber nicht unmittelbar an Frege an, sondern er entwickelt zunächst seine eigene Methode. Er bezeichnet diese Methode als die Methode der Intension und der Extension. Er stellt dann nachträglich fest, daß Intension und Extension sich partiell, aber auch nur partiell mit Sinn und Bedeutung decken. Auf eine unvermeidliche Art hat die Durchführung einen technischen Apparat zur Voraussetzung, der noch dadurch wesentlich kompliziert wird, daß um der angestrebten Allgemeingültigkeit der Resultate willen auf eine nur partiell formalisierte Sprache Bezug genommen wird. Aus diesem Grunde ist es unmöglich, auf diesen Apparat im Rahmen einer Anzeige einzugehen. Er muß einem eigenen Studium überlassen werden. Dagegen scheint es mir, daß es möglich ist, die Hauptergebnisse auch mit diesem Verzicht durch eine Spiegelung an Frege so anzudeuten, daß der wichtigste Ertrag der Carnapschen Bemühungen deutlicher zum Ausdruck kommt, als durch Carnap selbst. Die Carnapschen Intensionen und Extensionen sind so eingeführt, daß Folgendes gesagt werden kann: (1) Auch die Prädikate haben eine Intension und eine Extension. (2) Die Intension eines sprachlichen Ausdrucks ist auch für Eigennamen im engeren Sinne erklärt. (3) Es wird generell erklärt, wann zwei sprachliche Ausdrücke, die überhaupt zur Konkurrenz zugelassen sind, denselben Sinn haben sollen. — Es scheint mir, daß diese Andeutungen genügen werden, um das Geleistete und damit zugleich den Gewinn eines eindringenden Studiums auf eine angemessene Art zur Geltung zu bringen. — Der Carnapschen Konstruktion liegt eine Semantik zugrunde, die, im Einklang mit früheren Konstruktionen desselben Verf., auf dem Begriffspaar „wahr“ und „L-wahr“ („wahr“ im logischen Sinne des Wortes) fußt. Das Folgende ist eine zwar nicht wort-, aber sinngetreue Reproduktion der Carnapschen Ansätze. ω sei ein nicht-leerer Individuenbereich. Eine aus einem (einstelligen) Prädikat und einem Subjekt bestehende Aussage soll ω -wahr heißen, wenn die Eigenschaft über ω , auf die das Prädikat sich bezieht, dem Individuum über ω zukommt, auf welches das Subjekt sich bezieht. Die Verallgemeinerung für den k -stelligen Fall ist trivial. Auf dieser Basis ist die ω -Wahrheit von zusammengesetzten Aussagen leicht definierbar. Es ist klar, daß das vom Ref. hier mit Rücksicht auf das Folgende eingeführte „ ω -wahr“ durch „wahr“ ersetzt werden kann für jeden Fall, für welchen vorausgesetzt wird, daß ω fest vorgegeben ist. Eine Aussage heiße „L-wahr“, wenn sie ω -wahr ist für jedes ω . Zwei Aussagen p, q heißen äquivalent, wenn sie denselben Wahrheitswert haben. Sie heißen L-äquivalent, wenn $p \leftrightarrow q$ L-wahr ist. — Die sprachlichen Objekte der semantischen Analysis heißen Designatoren. Sie zerfallen in drei Hauptklassen: Aussagen, Prädikatoren (Prädikate), Individual-Ausdrücke: Individuensymbole und Kennzeichnungen. In einer erhellenden Diskussion der Kennzeichnungen entscheidet der Verf. sich gegen Russell für die Fregesche Methode, die durch Bereitstellung eines eindeutig bestimmten Individuums für die kritischen Fälle, daß das gekennzeichnete Individuum gar nicht oder mehrfach existiert, eine Unterordnung der Kennzeichnungen unter die Eigennamen ermöglicht. Als Individuen sollen von Fall zu Fall die Gegenstände der untersten Stufe gelten. — Zwei Designatoren $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ sollen äquivalent bzw. L-äquivalent heißen, je nachdem, ob $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ wahr oder L-wahr ist. $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ soll erklärt sein für Aussagen durch $\mathfrak{A} \leftrightarrow \mathfrak{B}$, für (einstellige) Prädikatoren durch $\forall x (\mathfrak{A}x \leftrightarrow \mathfrak{B}x)$, für Individual-Ausdrücke durch sich selbst, mit der zusätzlichen Forderung, daß \equiv in diesem Falle die Rolle des Identitätssymbols übernimmt. Zwei Designatoren sollen dieselbe Extension haben, wenn sie äquivalent, dieselbe Intension, wenn sie L-äquivalent sind. Die Extension einer Aussage ist ihr Wahrheitswert, die Intension der durch sie ausgedrückte Gedanke („proposition“, im Gegensatz zu „sentence“). Die Extension eines (einstelligen) Prädikators ist die korrespondierende Klasse, die Intension die korrespondierende Eigenschaft. Die Extension eines Individual-Ausdrucks ist das Individuum, auf das er sich bezieht, die Intension der durch ihn ausgedrückte Individualbegriff („individual concept“). Ein Designator heißt extensional, wenn er in jedem Designator, in welchem er vorkommt, nach Belieben ersetzt werden kann durch einen äquivalenten Designator derselben Art, ohne dessen Extension zu verändern. Er heißt intensional, wenn er nach Belieben durch einen L-äquivalenten Designator ersetzt werden kann, ohne die Intension des Designators, in welchem er vorkommt, zu ändern. (Intensionalität soll etwas mehr sein als Nicht-Extensionalität). Im Anschluß an diese Begriffsbildungen wird nun noch der auf eine unvermeidliche Art ziemlich verwickelte Begriff des intensionalen Isomorphismus zweier Designatoren eingeführt, um der Aporie zu begegnen, die sich daraus ergibt, daß zwei L-äquivalente Designatoren nicht in jedem Falle nach Belieben ersetzt werden können, ohne den intensionalen Charakter des Designators zu stören, in den sie eingebettet sind. — Dies scheint mir das Wesentlichste zu

sein aus dem grundlegenden ersten Kapitel: *The Method of Extension and Intension*. Das Folgende kann nur noch angedeutet werden. Das Ziel des zweiten Kapitels („*L-Determinacy*“) ist eine Reduktion der Extensionen auf die Intensionen. Das dritte Kapitel („*The Method of the Name-Relation*“) ist reserviert für eine Diskussion und Kritik von Freges „Sinn und Bedeutung“. Es ist mir aufgefallen, daß, wenn ich nichts übersehen habe, keines der von mir angezeigten Desiderate angemeldet wird. Stattdessen werden Aporien oder Nachteile der Fregeschen Konstruktion erörtert, deren Gewicht ich zwar durchaus nicht bestreiten möchte; aber sie scheinen mir nicht von derselben Größenordnung zu sein. Zu der Fregeschen Lehre, daß Prädikate als solche weder einen Sinn noch eine Bedeutung haben, die sich aus seiner funktionalen Auffassung der Begriffe ergibt, ist überhaupt nichts gesagt. Dies scheint mir eine wesentliche Lücke zu sein. Oder soll die von Carnap nachdrücklich empfohlene Identifizierung von Eigenschaften und Klassen mit der entsprechenden Reduktion der ihnen korrespondierenden sprachlichen Ausdrücke die Antwort auf Freges Hemmungen sein? Dann hätte dies explizit gesagt und nicht dem Erraten überlassen werden sollen; denn die Andeutung p. 116, die vielleicht so gemeint ist, scheint mir das Erforderliche in keinem Falle zu leisten. Und was wird dann aus den Intensionen der Prädikate? Ich bin nicht in der Lage zu antworten. In einem abschließenden vierten Kapitel („*On Metalanguages for Semantics*“) wird die Möglichkeit einer in bezug auf Intension und Extension an sich neutralen und in diesem Sinne ökonomischeren Metasprache für die Semantik erörtert. Im Anschluß hieran die Möglichkeit einer extensionalen Metasprache für die semantischen Begriffsbildungen. Als eine Art von Anhang wird in einem fünften Kapitel („*On the Logic of Modalities*“) eine Semantik für die modalen Aussagen entworfen, die immer noch zu den Schmerzenskindern einer formalisierten Logik gehören; denn man ist noch weit entfernt von einer Einigkeit in bezug auf die Frage, was hier formalisiert werden soll. — Es scheint mir, daß eine Überprüfung der Hauptresultate, insbesondere eine Überprüfung der Frage, was für die Sinnleichheit zweier Aussagen oder zweier Individual-Ausdrücke gewonnen ist, dadurch ernstlich erschwert wird, daß die Anzahl der diskutierten Beispiele viel zu klein ist. Ich vermute, daß das Erforderliche überhaupt erst durch eine eingehende Erprobung an einer hierfür geeigneten formalisierten Sprache geleistet werden kann. Verf. ist selber weit entfernt von dem Anspruch, etwas Abschließendes gewonnen zu haben. Um so mehr ist der Antrieb hervorzuheben, den die Erhellung dieser unabweislichen Grundfragen einer semantischen Analysis der Sprache durch seine ungewöhnlich anregenden Untersuchungen erfahren hat.

Heinrich Scholz (Münster i. W.).

● Reichenbach, Hans: *Elements of symbolic logic*. New York: The Macmillan Company 1947. repr. 1948. XIII, 444 p. \$ 5, 25.

Dieses Werk verfolgt einen doppelten Zweck. Es will eine möglichst umfassende, nicht nur für Mathematik bestimmte Einführung in die mathematische Logik sein, und es will zeigen, wie die Methoden dieser Logik angewendet werden können auf die Erhellung der Ausdrucksmittel und Ausdrucksmöglichkeiten der Umgangssprachen. Verf. bemerkt mit Recht, daß sein Werk der erste Versuch mit einer solchen doppelten Zielsetzung ist. „Einführung“ bedeutet in diesem Falle, daß auf formalisierte Beweise, mit Recht, wie mir scheint, verzichtet ist. Es sind jedoch die Grundregeln des Schließens mit einigen Derivaten (z. B. dem Deduktionstheorem) in die Darstellung aufgenommen, so daß für den engeren Prädikatenkalkül der ersten Stufe gezeigt werden kann, daß aus einer Menge von allgemeingültigen Ausdrücken mit Hilfe dieser Regeln ein Widerspruch nicht abgeleitet werden kann. Um dem Verf. nichts schuldig zu bleiben, wird man voranzustellen haben, was für den zweiten Hauptzweck geleistet ist. Hier ist ein neuer Anfang gemacht. Ein Anfang mit den unvermeidlichen Fragezeichen, die einem ersten kühnen Vorstoß in ein wesentlich unerforschtes Gebiet in jedem Falle anhaften werden; aber ein Anfang, der so ermutigend ist, daß dies klar und deutlich gesagt werden muß. Nicht eben so gut scheint mir die „Einführung“ gelungen zu sein. Aus den Bedenken, die ich im Folgenden fortlaufend anmelden müssen, scheint mir zu folgen, daß sie dem Anfänger in dieser Gestalt nicht empfohlen werden kann. Diese Bedenken sollen jedoch die Selbständigkeit nicht überschatten, die auch dieser Einführung ein anregendes Gepräge verleiht, und erst recht nicht die Verdienste, die Verf. sich um die logische Analysis der Umgangssprachen erworben hat. Auf eine für mich nicht begreifliche Art wird der erkenntnistheoretische Standpunkt eines radikalen Empirismus — des Physikalismus, wie der Verf. sagt, — so geltend gemacht, als ob er zu den Grundlagen einer mathematischen Logik gehörte (§ 49). Dies geht so weit, daß der nicht-empirische Charakter von mathematischen Existenzaussagen vom Typus „ $\exists x Fx$ “ durch den Übergang zu der metasprachlichen Aussage, daß „ $\exists x Fx$ “ nicht widerspruchsvoll ist, weggezaubert wird. Noch übler ergeht es den Existenzaussagen vom Typus „ $\exists FFF$ “. Für den Physikalismus des Verf. sind Aussagen über die Existenz von mathematischen Eigenschaften so anstößig, daß er den Wunsch gewisser Logiker verständlich findet, auf den höheren Funktionenkalkül überhaupt zu verzichten (p. 283f.). Mir selbst ist bis jetzt nicht ein einziger Logiker dieser Richtung bekannt. Ich würde hieraus umgekehrt schließen: Um so schlimmer für den Physikalismus und überhaupt für jeden Standpunkt, der die mathematische Logik auf eine für sie so heillose Art von erkenntnistheoretischen Dogmen abhängig macht! Es scheint mir, daß man einen Anfänger und erst

recht einen Nicht-Mathematiker in gar keinem Falle einem Dogma zu Liebe so unterweisen sollte. — Der Stoff ist in einer guten Anordnung auf acht Kapitel verteilt. I. Introduction, mit den notwendigen Bemerkungen über Sprache und Metasprache. II. The Calculus of Propositions, mit einer wohlgedachten Übersicht über die Hauptsätze und einer Diskussion der Grundregeln des Schließens und ihrer wichtigsten Derivate. Nicht alle, aber fast alle Regeln sind, auf eine von der Normalform abweichende Art, zunächst nur für den Fall des Wahrseins und erst dann für den Fall der Allgemeingültigkeit formuliert, viele überhaupt nur für den Fall des Wahrseins. So alle abgeleiteten Schlußregeln des Aussagenkalküls (§ 15). Ebenso hernach im Prädikatenkalkül. Es ist anzunehmen, daß diese ungewöhnliche Abweichung von der Normalform auf pädagogische Erwägungen zurückzuführen ist. Dann würde ich mich diesen Erwägungen nicht anschließen können, aus folgenden Gründen: 1. Die Formulierungen, so weit sie auf beide Fälle Bezug nehmen, werden mit überzähligen Fall-Unterscheidungen belastet. 2. Es wird, wenn ich nichts übersehen habe, dem Anfänger nirgends klar und deutlich gesagt, daß für den Kalkül nur der Fall der Allgemeingültigkeit in Betracht kommt. 3. Da viele Regeln nur für den Fall des Wahrseins in Variablen angeschrieben, dagegen für den Fall der Allgemeingültigkeit ohne den Gebrauch von Variablen formuliert werden, wird dem Anfänger die fundamentale Unterscheidung von Kalkül-Variablen und syntaktischen Variablen nicht deutlich genug zum Bewußtsein gebracht. — In keiner der vier Formulierungen der Ersetzungsregel (§ 13) ist die „Ersetzbarkeit nach Belieben“ ausgedrückt. Der angegebene Beweis ist auf Erwägungen gestützt, denen der Anfänger nicht wird entnehmen können, wie ein solcher Beweis korrekt über die Ausdrucksstufen zu führen ist. Nicht gut zu heißen ist auch der planmäßige Gebrauch von „impliziert“ an Stelle von „Wenn . . . , so . . .“, obschon Verf. die, wie mir scheint, durchschlagende Einwendung gegen seinen Sprachgebrauch kennt (p. 329, Anm. 1). III. und IV. The Simple Calculus of Functions, von den Grundlagen, über eine partielle Lösung des Entscheidungsproblems für den einstelligen Fall, die inzwischen durch die musterhaft vereinfachte vollständige Lösung von W. V. Quine [„On the Logic of Quantification“, J. Symbolic Logic 10, 1—12 (1945)] überholt ist, und eine abermals sehr gute Übersicht über die Hauptsätze, die über das allgemein Bekannte hinausführt, bis zum Beweis des nach meiner Meinung für den Anfänger zu subtil bewiesenen Theorems, daß aus einer Menge von allgemeingültigen Ausdrücken mit Hilfe der Grundregeln ein Widerspruch nicht abgeleitet werden kann. Die prädikatenlogische Einsetzungsregel (§ 26) ist so verwickelt formuliert, daß ich es nicht riskieren würde, einen nicht-trivialen Fall an dieser Regel zu überprüfen. Der Übergang von der für diesen Fall un zweckmäßigen Russellschen zur Bernayschen Symbolisierung der Nennformen würde einer glücklicheren Formulierung zu Hilfe gekommen sein. Das Deduktionstheorem (p. 144) ist nicht einwandfrei formuliert; denn wenn „ p “ (Bezeichnung vom Verf.) eine Menge (set) von Ausdrücken ist, so ist „ $p \rightarrow q$ “ überhaupt nicht definiert, kann also auch nicht Objekt einer metasprachlichen Behauptung sein. Unverständlich ist mir die 4. Regel zur Erzeugung von Definitionsgleichungen (p. 123 unten): „Das definiendum darf keine gebundenen Variablen enthalten“; denn dann würde schon nicht mehr eine Definitionsgleichung zulässig sein wie $\exists x H(x) =_{df} \neg \forall x \sim H(x)$. Um so positiver möchte ich die Diskussion der beiden Haupteinwände gegen den WF-Beweis (§ 33) bewerten. Ebenso die sich anschließende Diskussion der logischen Evidenz (§ 34), mit der, wie mir scheint, einer genauen Überprüfung zu empfehlenden Feststellung, daß eine Aussage über die Allgemeingültigkeit eines Ausdrucks ihrerseits eine empirische Aussage ist (p. 186). — Es folgt jetzt V. The Calculus of Classes, mit Einschließung der Aristotelischen Syllogistik, des Russellschen Abstraktionsprinzips (das effektiv auf Frege zurückgeht) und der Klassen vom Range n (Paarklassen usw.). Die Konstituierung ist zwar nicht einwandfrei; aber für den Anfänger ausreichend. Aber die Allklasse hätte nicht auch ein Opfer des Physikalismus werden sollen. Diesem Physikalismus zu Liebe soll sie die Klasse sein, die alle physikalischen Objekte oder Ereignisse enthält (p. 196). Der Behauptung, daß der Relationenkalkül sich im wesentlichen als unergiebig erwiesen habe (p. 211), würde ich auf eine entschiedene Art widersprechen müssen. Es folgt als Abschluß des ersten Hauptteils VI. The Higher Calculus of Functions, mit einer „Devis“, die dem Anfänger neue Ableitbarkeitsregeln ersparen soll (p. 229ff.). Mit Hilfe der zusätzlichen Definitionsgleichung

Df $\alpha[f, x] =_{df} f(x)$

soll z. B. aus (1)

$$f(x) \rightarrow \mathcal{A} y f(y)$$

durch Einsetzung (2)

$$f(x) \rightarrow \mathcal{A} g g(x)$$

gewonnen werden können. Erster Schritt: der korrekte Übergang von (1) zu

$$(1.1) \quad f(x, z) \rightarrow \mathcal{A} y f(y, z).$$

Zweiter Schritt: der Übergang von (1.1) zu

$$(1.2) \quad \alpha[f, x] \rightarrow \mathcal{A} g \alpha[g, x]$$

durch „ f''/α'' “, „ x''/f'' “, „ y''/g'' “, „ z''/x'' “. Hieraus (2), auf Grund von Df. Nun ist aber „ y'' “ in (1.1) gebunden, kann also gar nicht substituiert werden. Die Devise ist also gar nicht funktionsfähig. Es scheint mir daher, daß der Anfänger vor ihrem Gebrauch vielmehr gewarnt werden müßte. — Weitere Hauptpunkte dieses Kapitels sind eine Diskussion der logischen und der semantischen Antinomien (der im Interesse des Anfängers eine schärfere Profilierung zu wünschen

sein würde), die Grundzüge einer Theorie der Identität und einer Konstruktion der natürlichen Zahlen. — Der zweite Hauptteil umfaßt die beiden letzten Kapitel: VII. Analysis of Conversational Language. VIII. Connective Operations and Modalities. Hier ist fast alles von einem ungewöhnlichen Grade neu. Hauptpunkte der logischen Analysis der Umgangssprachen: Proper names, Descriptions, The Problem of individuals, Token-reflexive words („ich“, „du“, „er“, „dieser“, „hier“, „jetzt“), die verbalen Tempora, Diskussion der Adjektiva, der Adverbien usw., abschließend eine neue Classification of the parts of speech. Hauptpunkte des letzten Kapitels: eine Konstruktion der inhaltlichen Wenn...-Beziehung und eine Folge von Vorschlägen zur Konstituierung einer Modalitätenlogik. Zum ersten Hauptpunkt: Es ist trivial, daß die mit Hilfe der zweiwertigen Bewertungstafel gekennzeichnete Wenn...-Beziehung (Verf.: das adjunktive „Wenn..., so...“) das „Wenn..., so...“ im Sinne des inhaltlichen Denkens (Verf.: das konnektive „Wenn..., so...“) nicht trifft, sondern nur umfaßt. Andererseits überzeugt man sich leicht davon, daß das konnektive „Wenn..., so...“ eine notwendige Bedingung ist für eine korrekte Formulierung von irgend welchen Gesetzen (logischen oder Naturgesetzen). Ausdrücke von Gesetzen heißen in der Sprache des Verf. „nomological statements“. Der Ausdruck von logischen Gesetzen ist kein Problem. Er ist stets erreichbar durch die metalogische Feststellung, daß ein gewisser objektsprachlicher Ausdruck vom Typus $H_1 \rightarrow H_2$ allgemeingültig ist. Verf. drückt sich zwar wesentlich komplizierter aus; es scheint mir jedoch, daß das, was er meint, hierdurch pünktlich ausgedrückt ist. Nicht trivial ist dagegen die Frage, welche Anforderungen an den Ausdruck eines Naturgesetzes zu stellen sind. Es wird ohne Diskussion vorausgesetzt, daß Ausdrücke von Naturgesetzen Aussagen sind (mit Recht, wie mir scheint; aber nicht eben so selbstverständlich für einen Standpunkt, der die Anerkennung einer Aussage von ihrer endgültigen Verifizierbarkeit abhängig macht, wie M. Schlick [Die Kausalität in der gegenwärtigen Physik; Naturwiss. 19, 145–160 (1931); dieses Zbl. 1, 98]. Der radikale Empirismus des Verf. würde durch eine Diskussion dieser Auffassung verdeutlicht worden sein). H sei ein objektsprachlicher Ausdruck, „ $H(x)$ “ bedeute, daß x in H vorkommt, aber nicht gebunden. In einer ungewöhnlich fesselnden Diskussion werden 4 Grundforderungen dafür entwickelt, daß H ein Ausdruck eines Naturgesetzes ist: (1) Die Wahrheit von H muß im Rahmen einer induktiven Logik (die Verf. in anderen Werken in seinem Sinne präzisiert hat) beweisbar sein. Durch diese (für mein Gefühl nicht präzisierte, aber vermutlich überhaupt nicht präzisierbare) Forderung sollen die Aussagen ausgeschlossen werden, die ihr Wahrsein, wie gewisse Prophetien von Wahrsagern, dem Zufall verdanken. (2) H muß eine All-Aussage sein, genauer (im einfachsten Falle) ein Ausdruck vom Typus „ $\forall x(H_1(x) \rightarrow H_2(x))$ “. (3) Für jedes solche H — dies ist die interessanteste Forderung — ist zu verlangen:

$$a) \mathcal{A}x(H_1(x) \wedge H_2(x)), \quad b) \mathcal{A}x(\sim H_1(x) \wedge H_2(x)), \quad c) \mathcal{A}x(\sim H_1(x) \wedge \sim H_2(x)).$$

Durch a) werden die H ausgeschlossen, die wahr sind, weil $H_1(x)$ — die Prämisse — identisch falsch, durch c) die H , die wahr sind, weil $H_2(x)$ — die conclusio — identisch wahr ist, durch b) der Fall, daß $\forall x(\sim H_1(x) \rightarrow \sim H_2(x))$, hieraus durch Übergang von H_i zu $\sim H_i$ der ursprüngliche Ausdruck mit den Freiheitsgraden, die ihm entzogen werden sollen. (Für diese Begründung ist Ref. verantwortlich). Diese Forderungen können auch so formuliert werden, daß die Alternative

$$H_1(x) \wedge H_2(x) \vee \sim H_1(x) \wedge H_2(x) \vee \sim H_1(x) \wedge \sim H_2(x)$$

falsch wird, sobald wenigstens eines der Alternativ-Glieder unterdrückt wird. Der Verf. nennt ein dieser Bedingung genügendes H vom Typus $\forall x(H_1(x) \rightarrow H_2(x))$ voll erschöpfend (fully exhaustive). Er kann daher die dritte Forderung kurz so aussprechen, daß H voll erschöpfend sein muß. (4) H darf keine Individuensymbole enthalten, weil sonst Aussagen, die man nicht wird zulassen wollen, Ausdrücke von Naturgesetzen sein würden. — Für eine möglichst genaue Abgrenzung dieser Ausdrücke kommt nun noch eine Reihe von weiteren notwendigen Einschränkungen hinzu, auf die hier nicht eingegangen werden kann. Alle oder fast alle Forderungen werden durch Beispiele einleuchtend motiviert. — Beiläufige Bemerkungen: p. 200 Anm. 1 ist Psellus durch Petrus Hispanus, p. 208 und 336 Russell durch Frege zu ersetzen. Scholz.

●Bocheński, J. H.: Précis de la logique mathématique. (Collection Synthèse Nr. 2). Bussum: F. G. Kroonder 1949. 90 p.

Dieser Abriß der mathematischen Logik deckt sich in bezug auf das, was gebracht wird, im wesentlichen mit dem ersten Hauptteil von R. Carnaps „Abriß der Logistik“ (Wien 1929). Er enthält also wie dieser die grundlegenden Konstruktionen der „Principia Mathematica“ bis zur Konstruktion der Fregeschen Vorfahr-Beziehung und die Elemente der Ordnungstheorie, dagegen nicht mehr die Elemente der allgemeinen Kardinalzahl-Arithmetik und auch nicht mehr die Konstruktionen der Grenzbegriffe und der Stetigkeit, stattdessen eine Reihe von Komplementen. Die wichtigsten Komplemente sind folgende: (1) die Grundzüge einer axiomatisch-deduktiven Konstituierung des Aussagenkalküls, mit Benutzung der klammerfreien

Symbolik und der vorbildlich durchstilisierten Beweistechnik von J. Łukasiewicz; (2) die Hauptsätze des engeren Prädikatenkalküls der ersten Stufe; (3) die Aristotelische Syllogistik, im wesentlichen nach der noch einmal vorbildlichen Konstruktion von J. Łukasiewicz; (4) Hindeutungen auf die Semantik (A. Tarski) und auf die beiden originalsten Schöpfungen der transatlantischen Logiker: die kombinatorische Logik von H. B. Curry und den Lambda-Kalkül von A. Church. Es ist alles mit der größten Sorgfalt gemacht. Besonders gut ist die Antinomie des Lügners in wenigen Zeilen herausgearbeitet und in ebenso wenigen Zeilen gezeigt, wie sie durch eine genaue Unterscheidung von Sprache und Metasprache (*suppositio formalis* und *materialis*) zum Verschwinden gebracht werden kann. Daß die Russellsche Antinomie nicht ganz so überzeugend herausgekommen ist, scheint mir daran zu liegen, daß diese Antinomie erst mit Hilfe des hier nicht zur Verfügung stehenden Komprehensionsprinzips herausgebracht werden kann. Das Quinesche Test-Verfahren zur Verifizierung der Russellschen Typenregel (17.51) scheint mir in (a) und (b) nicht einwandfrei formuliert zu sein. Eine sorgfältig ausgewählte Bibliographie ist als Anhang beigegeben. Der Abriß ist ein Denkmal der Warschauer Schule, deren bewunderungswürdige Leistungen immer wieder erkennen lassen, was mit ihr auf eine unentschuld bare Art zugrunde gegangen ist. *Heinrich Scholz* (Münster).

Aubert, Karl Egil: *Relations généralisées et indépendance logique des notions de réflexivité, symétrie et transitivité. I, II.* C. r. Acad. Sci., Paris 229, 284—286, 538—540 (1949).

Verf. betrachtet Verallgemeinerungen des Begriffs der Relation. Nach der üblichen Auffassung ist eine n -stellige Relation in einem Bereich E definiert, wenn jedem geordnetem n -tupel (a_1, \dots, a_n) mit Elementen aus E der Wert wahr oder falsch, oder im Falle einer mehrwertigen Logik, einer der verschiedenen Wahrheitswerte zugeordnet ist. Nach der vorliegenden Definition ist eine Relation in E bestimmt, wenn jedem geordnetem n -tupel mit Elementen aus E und beliebigem n ($n \geq 2$) ein Element T_i einer gegebenen Menge L , deren Kardinalzahl mindestens 2 ist, zugeordnet ist. Haben wir zwei Tupel

$$u_1 = (a_1, \dots, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+m}) \quad \text{und} \quad u_2 = (a_{i+1}, \dots, a_{i+m}, a_{i+m+1}, \dots, a_n),$$

so wird unter $u_1 \circ_m u_2$ das Tupel $(a_1, \dots, a_i, a_{i+m+1}, \dots, a_n)$ verstanden. Es werden dann Verallgemeinerungen der Reflexivität, Symmetrie und Transitivität von Relationen gegeben. I. Eine Relation R heißt T_i -reflexiv, wenn den Tupeln mit lauter gleichen Elementen immer der Wert T_i zugeordnet ist. II. R heißt $T_i(S)$ -symmetrisch, wenn für ein gewisses n die n -tupel mit dem Wert T_i durch die Permutationen einer Gruppe S wieder in solche n -tupel übergehen. III. Sie heißt $T_i(N)$ -transitiv, wo N eine Untermenge der Menge der positiven ganzen Zahlen ist, wenn mit den Tupeln u_1 und u_2 auch immer $u_1 \circ_m u_2$ den Wert T_i hat, sobald m ein Element von N ist. Falls die Elemente von L , also die T_i , Wahrheitswerte einer mehrwertigen Logik darstellen, werden noch andere Verallgemeinerungen gegeben. IV. R heißt $L(S)$ -symmetrisch, wenn folgendes der Fall ist: Hat ein n -tupel den Wert T_i und das hieraus durch eine Permutation der Gruppe S entstehende n -tupel den Wert T_j , so soll die Implikation $T_i \supset T_j$ in der Logik richtig sein. V. R heißt $L(N)$ -transitiv, wenn immer, falls $u_1, u_2, u_1 \circ_m u_2$ ($m \in N$) die Werte T_i, T_j, T_k haben $(T_i \& T_j) \supset T_k$ in der Logik abgeleitet werden kann. — In der zweiten Note werden Kriterien dafür aufgestellt, wann bei einer gegebenen Relation die Begriffe I, II, III und I, IV, V voneinander unabhängig sind, was unter sehr allgemeinen Bedingungen der Fall ist.

Ackermann (Lüdenschaid).

Henkin, Leon: *The completeness of the first-order functional calculus.* J. symbolic Logic 14, 159—166 (1949).

Für die zuerst von Gödel bewiesene Vollständigkeit des engeren Prädikatenkalküls wird hier ein neuer Beweis gegeben, der zwar letztlich auf demselben Grund

gedanken beruht, aber doch eine wesentliche Abänderung erfahren hat. Die angewandte Methode besitzt den Vorzug, daß sie verhältnismäßig geringe formale Ableitungen aus dem Axiomensystem verlangt. Es wird eine Menge von Formeln des Kalküls betrachtet, die keine freie Variable enthalten und die miteinander verträglich sind, d. h. aus denen kein Widerspruch abgeleitet werden kann. Für eine derartige Menge wird ein Individuenbereich konstruiert und eine Interpretation der vorkommenden Prädikate usw. angegeben, so daß die Formeln der Menge gleichzeitig erfüllbar sind und andererseits bei dieser Interpretation nur solche Formeln den Wahrheitswert „richtig“ erhalten, die mit Hilfe des Axiomensystems aus der Formelmenge ableitbar sind. Die Konstruktion des Individuenbereichs geschieht schrittweise dadurch, daß zu Formeln der Gestalt $(\exists x)A$ aus obiger Menge gewisse Formeln A' hinzugefügt werden, wobei A' aus A dadurch entsteht, daß die Variable x durch eine besondere, zu diesem Zweck eingeführte Individuenkonstante ersetzt wird. Das wird für die neu entstandene Formelmenge wiederholt usw. Die schließlich entstandene Formelmenge kann dann durch andere Formeln im Bereiche der eingeführten Symbole so ergänzt werden, daß die Hinzunahme jeder weiteren Formel einen Widerspruch ergeben würde. — Das benutzte formale System kann dabei in gewisser Weise unbestimmt gelassen werden, vor allem hinsichtlich der vorhandenen primitiven Symbole. Ref. kann dem Verf. aber nicht folgen, wenn er sogar von der Möglichkeit einer mehr als abzählbaren Menge von primitiven Symbolen spricht, da es ein derartiges Bezeichnungssystem doch nicht geben kann.

W. Ackermann (Lüdenscheid).

Markov, A.: Über eine Darstellung der rekursiven Funktionen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 58, 1891—1892 (1947) [Russisch].

Mit einer festen primitiv rekursiven Funktion $P(u)$ kann man genau dann jede rekursive Funktion $\varphi(\eta)$ darstellen in der Form $\varphi(\eta) = P(\mu x Q(x, \eta))$ mit geeignet gewählter primitiv rekursiver Funktion $Q(x, \eta)$, für welche $\forall \eta \exists x Q(x, \eta)$ beweisbar ist, wenn $P(u)$ jede natürliche Zahl unendlich oft als Wert annimmt. Vgl. Post [J. Symbolic Logic 11, 73—74 (1946)]. Ohne Beweise. *Hermes*.

Piaget, Jean: Le groupe des transformations de la logique des propositions bivalentes. Arch. Sci., Genève 2, 179—182 (1949).

Im Bereich der 16 zweiwertigen Wahrheitsfunktionen $\varphi(p, q)$ lassen sich die Transformationen $N\varphi$ und $R\varphi$ einführen durch $(N\varphi)(p, q) = \sim \varphi(p, q)$, $(R\varphi)(p, q) = \varphi(\sim p, \sim q)$ (Einsetzung; \sim ist die Negation). N und R erzeugen die Kleinsche Vierergruppe. *Hermes* (Münster).

Henkin, Leon: Fragments of the propositional calculus. J. symbolic Logic 14, 42—48 (1949).

Die Methode des Kalmarschen Vollständigkeitsbeweises (dies. Zbl. 14, 194) für den Aussagenkalkül wird auf beliebige (zweiwertige) Aussagenkalküle übertragen, in denen außer evtl. weiteren Wahrheitsfunktionen in jedem Falle die Implikation vertreten ist. Der Beweis wird ausgeführt für den Fall, daß außer der Implikation genau eine weitere m -stellige Funktion Φ (etwa durch Φ) symbolisiert ist ($m \geq 0$). Der Kalkül wird durch Axiomenschemata und die Abtrennungsregel bestimmt. Schemata für die Implikation sind:

$$H_1 \rightarrow (H_2 \rightarrow H_1), H_1 \rightarrow H_2 \cdot \rightarrow \cdot (H_1 \rightarrow (H_2 \rightarrow H_3)) \rightarrow (H_1 \rightarrow H_3) \text{ und} \\ H_1 \rightarrow H_3 \cdot \rightarrow \cdot ((H_1 \rightarrow H_2) \rightarrow H_3) \rightarrow H_3.$$

Für Φ werden 2^m Schemata angegeben, die sich wie folgt beschreiben lassen: Mit $W(H_1, H_0) \stackrel{\text{Def}}{=} (H_1 \rightarrow H_0) \rightarrow H_0$, $F(H_1, H_0) \stackrel{\text{Def}}{=} H_1 \rightarrow H_0$ entspricht z. B. der Gleichung $\Phi(W, F, \dots) = W$ das Schema

$$W(H_1, H_0) \rightarrow (F(H_2, H_0) \rightarrow (\dots W(\Phi(H_1, H_2, \dots), H_0) \dots)).$$

Hauptschritte des Beweises: Übertragung der Schemata für Φ auf zusammengesetzte Ausdrücke; schrittweise Ausschaltung der Prämissen mit Hilfe von

$$F(H_1, H_0) \rightarrow H_2 \cdot \rightarrow \cdot (W(H_1, H_0) \rightarrow H_2) \rightarrow H_2;$$

Übergang von $W(H, H_0)$ zu H . — Diskussion der Unabhängigkeit der Schemata und Übertragung auf Mengen von Ausdrücken. *G. Hasenjaeger* (Münster).

Robinson, Julia: Definability and decision problems in arithmetic. *J. symbolic Logic* 14, 98—114 (1949).

Die Arbeit behandelt die Definierbarkeit einiger Begriffe aus der Theorie der ganzen und rationalen Zahlen mit den Mitteln des Prädikatenkalküls der ersten Stufe (arithmetische Def.) durch andere Begriffe. Als Folgerung ergeben sich Aussagen über die Unlösbarkeit des Entscheidungsproblems in den entsprechenden Theorien. — Eine k -stellige Beziehung R heißt (arithm.) definierbar durch Begriffe A, B, C, \dots , wenn es einen Ausdruck H mit genau k freien Variablen und Symbolen für A, B, C, \dots als einzigen außerlogischen Konstanten gibt, der von genau denjenigen k -Tupeln erfüllt wird, die in der Beziehung R stehen; entsprechend für Funktionen. [Die rekursive Def. fällt nicht darunter, sondern wird erst erfaßt, wenn in H auch gebundene Prädikaten- (bzw. Mengen-) Variablen zugelassen werden.] — In § 1 (Definierbarkeitsprobleme in der Arithmetik der ganzen Zahlen) wird gezeigt: Theorem 1.1. Die Addition für positive ganze Zahlen ist definierbar durch: a) die Multiplikation und die Nachfolgeroperation $Sa = a + 1$; b) die Multiplikation und die Kleiner-Beziehung. Zu a): Man benutzt, daß

$$a + b = c \leftrightarrow S(a \cdot c) \cdot S(b \cdot c) = S[(c \cdot c) \cdot S(a \cdot b)];$$

zu b): Man benutzt, daß $Sa = b \leftrightarrow a < b \wedge \forall x \sim (a < x \wedge x < b)$. Theorem 1.2. Addition und Multiplikation für positive ganze Zahlen sind definierbar durch S und die Teilbarkeit $a|b$. Man benutzt, daß

$$a \cdot b = c \leftrightarrow \forall x (a|x \wedge b|x \wedge c|x) \vee \forall x y m \{ [a \perp x \wedge b \perp y \wedge c \perp x \wedge c \perp y \wedge x \perp y \wedge m|S(a \circ x) \wedge m|S(b \circ y)] \rightarrow \exists u [m|u \wedge Su = c \circ (x \circ y)] \}$$

mit

$$a \perp b \stackrel{\text{Def}}{\leftrightarrow} \forall x (x|a \wedge x|b \rightarrow \forall y x|y) \text{ und } c = a \circ b \stackrel{\text{Def}}{\leftrightarrow} \forall x (a|x \wedge b|x \leftrightarrow c|x).$$

— In § 2 (Ein axiomatisches Problem aus der Theorie der positiven ganzen Zahlen) werden Axiomensysteme für diese Theorie mit $1, S, \dots$ als Grundbegriffen diskutiert. — In § 3 (Definierbarkeitsprobleme in der Arithmetik der rationalen Zahlen) wird gezeigt, daß die Theorien der rationalen Zahlen und die der ganzen Zahlen in bezug auf Ausdrucksmöglichkeiten gleichwertig sind. Hierzu ist der Hauptschritt die Def. des Begriffs der ganzen Zahl durch $+$ und \cdot in der Theorie der rationalen Zahlen (Theorem 3.1). Man benutzt, daß für rationale Zahlen mit

$$\Phi(x, y, z) \stackrel{\text{Def}}{\leftrightarrow} \exists r s t (2 + x y z^2 + y r^2 = s^2 + x t^2)$$

gilt: a ist ganz $\leftrightarrow \forall x y (\Phi(x, y, 0) \wedge \forall z (\Phi(x, y, z) \rightarrow \Phi(x, y, z + 1)) \rightarrow \Phi(x, y, a))$. Beim Beweis wird wesentlich ein Satz von Hasse über die Darstellbarkeit von Zahlen durch quadratische Formen im Körper der rationalen Zahlen benutzt. Es folgt: Theorem 3.2. n sei eine feste natürliche Zahl und R eine n -stellige Relation zwischen rationalen Zahlen. R' sei die Relation, die zwischen $2n$ ganzen Zahlen $p_1, p_2, \dots, p_n; q_1, q_2, \dots, q_n$ genau dann besteht, wenn $q_1 \neq 0, \dots, q_n \neq 0$ und R zwischen $p_1/q_1, \dots, p_n/q_n$ besteht. Dann ist R arithmetisch definierbar durch $+$ und \cdot für rationale Zahlen genau dann, wenn R' arithmetisch definierbar ist durch $+$ und \cdot für ganze Zahlen. — In § 4 (Anwendungen auf das Entscheidungsproblem in der Arithmetik) wird unter Benutzung von bisher unveröffentlichten Resultaten von Tarski und Mostowski gezeigt (durch Pos, Int, Rt seien die Begriffe der positiven ganzen, beliebigen ganzen, bzw. rationalen Zahl bezeichnet): Theorem 4.1. Jede Theorie, deren mathematische Konstanten Pos (bzw. Int), S und \cdot sind und deren Axiome für positive ganze Zahlen (bzw. für beliebige ganze Zahlen) gültig

sind, ist unentscheidbar. Das Resultat bleibt (für positive ganze Zahlen) gültig, wenn \cdot durch $|$ ersetzt wird. Theorem 4.2. Jede Theorie, deren mathematische Konstanten Rt , $+$ und \cdot sind und deren Axiome für rationale Zahlen gültig sind, ist unentscheidbar. Insbesondere gilt Theorem 4.3. Die allgemeine (arithmetische) Theorie der abstrakten Körper ist unentscheidbar. — Die rein mathematische Charakterisierung der Körper, deren Theorie entscheidbar ist, wird als Aufgabe formuliert.

G. Hasenjaeger (Münster).

Fitch, Frederic B.: On natural numbers, integers, and rationals. *J. symbolic Logic* 14, 81—84 (1949).

Verf. skizziert im Russell-Kalkül eine Methode, die natürlichen, rationalen, reellen Zahlen zu gewinnen, die verwandt ist mit analogen Entwicklungen der Theorie der λ -Konversion. Die Zahlen werden aufgefaßt als Relationen zwischen Relationen, die Elemente einer festen Ausgangsmenge M sind. Die Beziehung $A n B$ zwischen den Relationen A und B besteht genau dann, wenn $A = B^n$ im Sinne der n -maligen Verkettung; insbesondere gilt $A 0 B$ genau dann, wenn A die auf das Feld von B beschränkte Identität ist, $A 1 B$, wenn $A = B$. Einführung der Operationen für Zahlen R , K : Multiplikation: $R \times K = R/K$ (Verkettung). Addition: $A(R + K) B \equiv A = B^R/B^K$; dabei ist $x A^R y = (\bar{A} B) (x B y \cdot B R A)$. Übergang zum Negativen: $A(-R) B \equiv A = (\bar{B})^R$ (\bar{B} ist die Konverse zu B). Reziprokenbildung: $1 : K = \bar{K}$. Die Sätze sind teilweise erst bei eingeschränkter Ausgangsmenge M herleitbar, so daß man unter Umständen zu höheren Typen übergehen muß, damit M nicht leer wird. Auch die reellen Zahlen lassen sich auf diesem Weg erhalten.

Hermes (Münster).

Schanzer, Roberto: Di un nuovo ordine logico nella geometria. *Sigma*, Roma 2, 497—516 (1948).

Verf. stellt sich die Aufgabe, durch eine kritische Revision eines Teiles der in der Mathematik gebrauchten traditionellen inhaltlichen Logik eine neue Grundlage zu schaffen für den Aufbau der Elementargeometrie. Es werden allgemein methodologische Fragen erläutert, und zwar unter Vermeidung der Symbolik. Die Aussagen werden in rationelle und primitive unterschieden, wobei die erstgenannten mit Hilfe der letzteren beweisbar sind. Er formuliert ein Substitutionsprinzip, demzufolge die beiden Arten von Aussagen in einer Theorie vertauschbar sind. Ähnlich wird zwischen rationellen und primitiven Erklärungen unterschieden und auch für diese ein Substitutionsprinzip formuliert. Eine Dualität zwischen den beiden logischen Entitäten wird erwähnt und schließlich wird ein Substitutionsprinzip zwischen Aussagen und Erklärungen mitgeteilt. — Um einen Eindruck zu geben, wie Verf. vorgeht, möge folgendes als Beispiel angeführt werden: „Mit dem Worte „Argument“ bezeichnen wir irgendeinen Gegenstand der Aktivität unseres Geistes oder, was dasselbe ist, alles, von dem wir irgendwie eine Kenntnis haben können, direkt oder indirekt, mit oder ohne Mitwirkung unserer Sinne“. — „Wir wollen Erklärung eines gegebenen Argumentes irgendein Verfahren nennen, das in den Stand setzt, es zu individualisieren, d. h. es zu unterscheiden von einem willkürlichen anderen Argument und, in unseren Beziehungen zu anderen Menschen, sie begreifen zu lassen, daß wir an jenes bestimmte Argument denken und nicht an andere“. *Gerretsen*.

Jecklin, H.: Historisches zur Wahrscheinlichkeitsdefinition. *Dialectica*, Neuchâtel 3, 5—15 (1949).

Zusammenfassender Bericht über die verschiedenen Versuche, die Wahrscheinlichkeit zu definieren. Dabei handelt es sich vielfach nicht um Begriffsbestimmungen, sondern um Vorschriften, wie die Wahrscheinlichkeit zu messen sei. Für die Wahrscheinlichkeitsrechnung genügt das; sie wird durch die verschiedenen Auffassungen über die Definition der Wahrscheinlichkeit nicht berührt. Verf. gibt einen guten Überblick über die neueren Versuche, eine Brücke zwischen Theorie und Wirklich-

keit, zwischen axiomatischer Begründung und naturwissenschaftlich-statistischer Auffassung zu schlagen. *Härten (München).*

Borel, Émile: Probabilité et certitude. *Dialectica*, Neuchâtel 3, 24—27 (1949).

Als obere Grenze für die Zahl aller Atomstöße im Universum, so weit es von uns begriffen wird, und solange das Sonnensystem besteht, wird von Verf. 10^{200} angegeben. Der reziproke Wert der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses, das als Wunder anzusehen wäre (wie z. B. des Wunders von Jeans, daß ein Liter Wasser in einem Ofen von 1000° gefriert), ist sehr viel größer, nämlich 10^N , wo $N > 10^{12}$. Ein solches Ereignis kann nach Verf. nicht, wie Jeans will, nur als höchst unwahrscheinlich, sondern muß als absolut unmöglich bezeichnet werden, weil die n -malige Wiederholung einer Erfahrung nicht gedacht werden könne, wenn n weit über die Größenordnung des häufigsten Ereignisses, der Atomstöße, hinausgeht. *Härten.*

Finetti, B. de: Le vrai et le probable. *Dialectica*, Neuchâtel 3, 78—92 (1949).

Philosophische Apologie des subjektiven Wahrscheinlichkeitsbegriffes. Verf. stellt fest, die Versuche einer objektiven Begründung der Wahrscheinlichkeit kämen von der Gewißheit des Wirklichen nicht los; sie seien Ausfluß eines Restes metaphysischer Einstellung, die strengerer wissenschaftlicher Analyse widerstehe. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung bleibt von der philosophischen Polemik unberührt, wie auch von Verf. angedeutet wird. *Härten (München).*

● **Kneale, William: Probability and induction.** Oxford: Clarendon Press, 1949. VIII, 264 p.

Strawson, P. F.: Necessary propositions and entailment-statements. *Mind*, n. S. 57, 184—200 (1948).

Hampshire, S. N.: Mr. Strawson on necessary propositions and entailment-statements. *Mind*, n. S. 57, 354—357 (1948).

Geach, P. T.: Necessary propositions and entailment-statements. *Mind*, n. S. 57, 491—493 (1948).

Britton, Karl, J. O. Urmson and W. Kneale: Are necessary truths true by convention? *Aristotelian Society*, supplementary vol. 21, 78—133 (1947).

Britton, Karl: The nature of arithmetic: A reconsideration of Mill's views. *Proc. Aristotelian Society*, n. S. 48, 1—12 (1948).

Bergmann, Gustav: Descriptions in non-extensional contexts. *Philosophy of Science* 15, 353—355 (1948).

● **Feigl, Herbert and Wilfried Sellars: Readings in philosophical analysis.** New York: Appleton-Century-Crofts, Inc., 1949. X, 626 p.

Algebra und Zahlentheorie.

Lineare Algebra. Polynome:

● **Weiss, M. J.: Higher algebra for the undergraduate.** New York: Wiley 1949. VIII, 165 p.; \$ 3.75.

Stewart, B. M.: Left associated matrices with elements in an algebraic domain. *Amer. J. Math.* 69, 562—574 (1947).

Es sei \mathfrak{R} der Ring aller ganzen Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers vom endlichen Grade k ; \mathfrak{R}_0 sei der Ring der ganzen rationalen Zahlen. Betrachtet werden quadratische Matrizen eines festen Grades n mit Elementen aus \mathfrak{R} ; Matrizen mit Elementen aus \mathfrak{R}_0 werden rational genannt. Die Aufgabe ist, zu entscheiden, wann zwei Matrizen A, B links äquivalent sind, d. h. wann eine unimodulare Matrix U existiert, für die $U \cdot A = B$, $U^{-1} \cdot B = A$ wird. Dabei wird überall, wo nötig, auf die klassischen Steinitz'schen Ergebnisse [*Math. Ann.*, Berlin 71, 328—354 (1911); 72, 297—375 (1912)] zurückgegriffen. Insbesondere wird ohne neuen Beweis der wichtige Steinitz'sche Satz benutzt: A und B sind schon dann linksäquivalent, wenn es zwei den Bedingungen $Q \cdot A = B$, $R \cdot B = A$ genügende Matrizen Q, R

gibt. — Der wesentliche neue Gedanke ist der, daß man mit Hilfe einer festen Basis $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ von \mathfrak{K} über \mathfrak{K}_0 die Elemente aus \mathfrak{K} als rationale Matrizen k -ten Grades darstellt und die Darstellungen in die gegebenen Matrizen A, B einsetzt, so daß zwei rationale Matrizen A^E, B^E des Grades $k \cdot n$ entstehen. Im ersten Teil der Arbeit kann dann mit Hilfe des oben angegebenen Steinitzschen Theorems rasch der Hauptsatz gewonnen werden: A und B sind dann und nur dann linksäquivalent, wenn es A^E und B^E sind. (Dabei muß natürlich für A^E, B^E auch die transformierende unimodulare Matrix U' rational sein.) — Für die rationalen Matrizen A^E, B^E läßt sich nun das Problem der Linksäquivalenz in wohlbekannter Weise dadurch entscheiden, daß man A^E, B^E rational mit endlich vielen Schritten jeweils auf eine passend normierte „Hermitesche Halbdiaagonalform“ transformiert; auch eine zugehörige unimodulare Matrix U' kann im Falle der Linksäquivalenz auf diese Weise leicht gefunden werden. Dagegen ist es i. a. nicht ohne weiteres möglich, ausgehend von der bekannt angenommenen rationalen Matrixgleichung $(k \cdot n)$ -ten Grades $U' \cdot A^E = B^E$ eine unimodulare Matrix n -ten Grades U zu gewinnen, für die $U \cdot A = B$ wird. Dementsprechend beschäftigt sich der zweite Teil der Arbeit eingehend mit der Frage, wie am bequemsten zu den als linksäquivalent erkannten Matrizen A, B eine transformierende unimodulare Matrix U bestimmt werden kann. Die Ergebnisse, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll, werden nur dann verhältnismäßig einfach und übersichtlich, wenn A und B nichtsingulär sind oder wenigstens im Steinitzschen Sinne die Hauptklasse als Spaltenklasse besitzen. Krull (Bonn).

Papy, Georges: Sur la divisibilité des formes alternées par des formes quadratiques régulières dans un espace à $2n$ dimensions. Bull. Soc. Sci. Liège **16**, 24—30 (1947).

u_i, v_i ($i = 1, \dots, n$) seien $2n$ alternierende Unbestimmte. A_ν seien gegebene Formen, X_ν gesuchte Formen ν -ten Grades. Für die folgenden Sätze, die für $\mu = n$ von Lepage [Bull. Soc. Sci. Liège **15**, 21—31 (1946)] stammen, werden neue Beweise durch Induktion gegeben: 1. Wenn A_2 regulär ist, d. h. Det. der Koeffizientenmatrix $\neq 0$, so hat $A_2^k X_{\mu-k} = A_{\mu+k}$ für $k \neq 0$ genau 1 Lösung. Allerdings darf nicht die Körpercharakteristik $\leq n$ sein, sonst wäre $A_2^n = 0$. — 2. Es sei $I_2 = \sum u_i v_i$. Dann und nur dann ist $I_2^k X_{\mu-2} = A_\mu$ lösbar, wenn stets $A_\mu \omega_1 \dots \omega_n = 0$ für $\omega_i = v_i - \sum p_{ij} u_j$ und beliebige $p_{ij} = p_{ji}$ ist. Verf. behauptet, daß in diesem Fall die Lösung eindeutig ist. Das ist sicher falsch für $\mu \geq n - 2$, da man dann $X_{\mu-2}$ noch um $A_{\mu-2-n} \omega_1 \dots \omega_n$ abändern kann. Witt.

Jones, B. W.: A theorem on integral symmetric matrices. Bull. Amer. math. Soc. **55**, 620—622 (1949).

A und B seien ganzrationale symmetrische Matrizen mit von Null verschiedener Determinante. A sei n -reihig, B sei m -reihig ($n > m$). Vorausgesetzt wird, daß eine rationale Matrix C mit der Transponierten C' existiert, so daß $C'AC = B$. Kleinstes gemeinsames Vielfaches der Nenner der Elemente von C sei s . Verf. beweist, daß es eine rationale Matrix T von der Determinante 1 gibt, so daß die Nenner der Elemente von T nur Primteiler von s enthalten, ferner $T'AT$ ganz rational ist und $X'T'ATX = B$ mit ganzrationalem X lösbar ist. Der Beweis verläuft ähnlich wie im ersten Teil von Hilfssatz 24 in der Siegelschen Abhandlung über die Analytische Theorie der Quadratischen Formen [Ann. Math., Princeton, II. **36**, 527—606 (1935); dies. Zbl. **12**, 197]. H. Braun (Göttingen).

Schur, Issai: Identities in the theory of power series. Amer. J. Math. **69**, 14—26 (1947).

Es wird ein neuer, rein algebraischer Zugang zur Lagrangeschen Umkehrformel für formale Potenzreihen entwickelt, der den Geltungsbereich der Formel erweitert und eine Reihe bemerkenswerter Beziehungen zwischen den durch

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = g(x), \quad g(x)^\mu = \sum_{-\infty}^{\infty} a_{\mu, \nu} x^\nu$$

definierten Polynomen $a_{\mu, \nu}$ der Unbestimmten a_1, a_2, \dots aufdeckt (μ beliebig komplex). Der Schlüssel ist die Matrixengleichung $(a_{\nu, \mu-\nu})^{-1} = (\nu \mu^{-1} a_{-\mu, \mu-\nu})$ [$\mu, \nu = 1, 2, \dots$]. Aus ihr folgen für die Umkehrungsfunktion $x = y G(y)$ von $y = x g(x)$ die der Lagrangeschen Umkehrungsformel äquivalenten Gleichungen

$$(1) \quad G(y)^k = \sum_{\nu=0}^{\infty} k(k+\nu)^{-1} a_{-k-\nu, \nu} y^{\nu} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Da links und rechts die Koeffizienten der Potenzen von y rational von k abhängen, gilt (1) für alle komplexen Zahlen $k \neq 0, -1, -2, \dots$. Für $k \rightarrow 0$ und $k \rightarrow -n$ ($n = 1, 2, \dots$) folgt

$$(2) \quad \log G(y) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{-1} a_{-\nu, \nu} y^{\nu}$$

$$G(y)^{-n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} n(n-\nu)^{-1} a_{n-\nu, \nu} y^{\nu} + n \gamma_n y^n,$$

wobei γ_n das durch

$$(3) \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_{\nu} x^{\nu} = \log g(x) (= -\log G(y))$$

definierte Polynom von a_1, a_2, \dots bedeutet. Aus (1), (2), (3) ergibt sich $a_{-n, n} = -\sum_{\nu=0}^{n-1} (n-\nu) \gamma_{n-\nu} a_{-n, \nu}$ ($n = 1, 2, \dots$). Weitere Umkehrformeln des obigen

Problems sind für jedes n $G(y) = \Phi_n(y)/\Phi_{n+1}(y)$ mit $\Phi_n(y) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n-\nu, \nu} y^{\nu}$. Alle diese Ergebnisse lassen sich leicht auf die Umkehrprobleme $y = x g(1/x)$ und $y = x/g(x)$ übertragen. Bei dem letzten, welches der üblichen Fassung der Lagrangeschen Umkehrformel zugrunde liegt, ist nur $a_{\mu, \nu}$ durch $a_{-\mu, \nu}$ zu ersetzen.

Wielandt (Mainz).

Parodi, Maurice: Sur les limites des modules des racines des équations algébriques. Bull. Sci. math., II. S. 73_I, 135—144 (1949).

Da die Wurzeln jeder algebraischen Gleichung als die charakteristischen Wurzeln einer geeigneten Matrix aufgefaßt werden können, erhält man aus allen Abschätzungen charakteristischer Wurzeln entsprechende Abschätzungen für die Wurzeln einer vorgelegten algebraischen Gleichung. Verf. überträgt so Sätze von Hirsch (1902), Hadamard (1903), Frobenius (1908), Browne (1930), Ostrowski (1937), Parker (1937), Ledermann (1939), Farnell (1944) und Brauer (1947). Der letzte gibt bei der Anwendung auf das Beispiel $x^{13} - x^2 - x = 1$ die schärfsten Schranken.

Wielandt (Mainz).

Amato, Vincenzo: Le curve algebriche nella teoria delle equazioni secondo Galois. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 104—109 (1949).

Verf. betrachtet zunächst Gleichungen mit zyklischer Gruppe und mit Gruppen, die einen zyklischen Normalteiler haben, und zeigt, daß die Gruppen durch geeignete Adjunktionen erniedrigt werden. Dann aber betrachtet er eine Gleichung, die auch für spezielle Werte des Parameters keinen Affekt haben soll, und reduziert sie mit einer Art von Lagrangescher Resolvente. Er führt hierbei den Beweis nicht aus. Ref. vermutet, daß Verf. eine wesentliche Voraussetzung seiner Aussage anzugeben vergessen hat.

Ott-Heinrich Keller (Dresden).

Thomas, Joseph Miller: Eliminants. Amer. J. Math. 69, 592—598 (1947).

Gegeben ist eine ebene Kurve in Parameterdarstellung

$$x = a_0 t^m + \dots + a_m, \quad y = b_0 t^n + \dots + b_n.$$

Die Resultante der beiden Polynome in t sei mit $R(a_m, b_n)$ bezeichnet. $E(x, y) = E(x, y; t) = R(a_m - x, b_n - y)$ heiße die Eliminate der beiden Polynome. $E(x, y)$ ist entweder irreduzibel oder Potenz eines irreduziblen Polynoms: $E(x, y) = A^k$ ($A \neq 0$). Der Parameter t heißt reduzibel, wenn ein Polynom $u = c_0 t^p + \dots + c_p$

vom Grade $p > 1$ existiert, derart daß sich x und y auch als Polynome in u schreiben lassen. Es gilt dann $E(x, y; u) = B f^l$ und $E(x, y; t) = C[E(x, y; u)]^p$ mit $k = pl$. Die Reduzibilität von t hat die Reduzibilität von $E(x, y; t)$ zur Folge. Im Haupttheorem der vorliegenden Arbeit wird die Umkehrung dieses Satzes bewiesen. Es gilt also: Die Eliminate ist dann und nur dann reduzibel, wenn der Parameter reduzibel ist. Verf. stellt abschließend eine Bedingung für die Reduzibilität des Parameters im Falle eines einzigen Polynoms auf. *H. L. Schmid* (Berlin).

Hua, L. K. and H. S. Vandiver: On the nature of the solutions of certain equations in a finite field. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **35**, 481—487 (1949).

Als Anwendung der Resultate von zwei früheren Arbeiten der Verf. (dies. Zbl. **30**, 342, **32**, 391) wird ein aus gewissen speziellen Charakteren gebildeter Ausdruck für die Anzahl der Lösungen der Gleichung $c_1 x_1^{a_1} + c_2 x_2^{a_2} + c_3 = 0$ angegeben, wo c_1, c_2, c_3, x_1, x_2 von Null verschiedene Elemente des Galoisfeldes $F(p^n)$ ($p \neq 2$) sind. — Für die Gleichung (1) $c_1 x_1^{a_1} + c_2 x_2^{a_2} + \dots + c_s x_s^{a_s} = 0$, wo die c_i und x_i von Null verschiedene Elemente des $F(p^n)$ sind, während $0 < a_i < p^n - 1$, $((a_i, p^n - 1), (a_j, p^n - 1)) = 1, i \neq j$, ergibt sich als Lösungsanzahl

$$N_s = \frac{p^n - 1}{p^n} ((p^n - 1)^{s-1} + (-1)^s).$$

Für $n = 1$ ergibt sich die Anzahl der mod p inkongruenten Lösungen der Kongruenz (1) mod p . *Trost* (Zürich).

Hua, Loo-Keng and H. S. Vandiver: On the number of solutions of some trinomial equations in a finite field. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **35**, 477—481 (1949).

Für die Gleichung (vgl. vorstehendes Referat) $c_1 x_1^{a_1} + c_2 x_2^{a_2} + c_3 = 0$ wird unter Annahme gewisser Spezialbedingungen für die c_i ($i = 1, 2, 3$) die exakte Lösungsanzahl in Funktion von $p, n, k_i = (p^n - 1, a_i), i = 1, 2$, angegeben. Für die allgemeine Lösungsanzahl werden bessere Abschätzungen gefunden, die sich für die zuerst behandelten Spezialfälle als exakt erweisen. *Trost* (Zürich).

Gruppentheorie:

Hall jr., Marshall: The word problem for semigroups with two generators. *J. symbolic Logic* **14**, 115—118 (1949).

Das Wortproblem für Semigruppen mit zwei Erzeugenden ist unlösbar. Beweis durch Reduktion auf die von Post [*J. symbolic Logic* **12**, 1—11 (1947)] gezeigte Unlösbarkeit des Wortproblems für Semigruppen. *Hermes* (Münster).

Evan, T.: Homomorphisms of non-associative systems. *J. London math. Soc.* **24**, 254—260 (1950).

Eine Quasigruppe mit neutralem Element (loop) kann auch gekennzeichnet werden als algebraische Struktur G mit drei Verknüpfungen $\cdot, /, \backslash$, zwischen denen die Beziehungen $a \cdot (a \backslash b) = (b / a) \cdot a = a \cdot (a \cdot b) = (b \cdot a) \cdot a = b, a / a = b \backslash b$ für alle $a, b \in G$ bestehen. Zwei Beispiele zeigen, daß eine bez. zweier dieser Verknüpfungen homomorphe Abbildung nicht auch bez. der dritten diese Eigenschaft zu haben braucht. *G. Pickert* (Tübingen).

Baer, Reinhold: Splitting endomorphismus. *Trans. Amer. math. Soc.* **61**, 508—516 (1947).

Betrachtet werden die Endomorphismen einer beliebigen, additiv geschriebenen, i. a. weder kommutativen noch assoziativen Gruppe L („loop“), die außerdem noch irgendeine Menge M von distributiven Linksmultiplikatoren besitzen darf. Zu jedem Endomorphismus η gehört eine eindeutig bestimmte normale Untergruppe $R(\eta)$ von L bestehend aus allen und nur den $a \in L$, bei denen $a \cdot \eta^i = 0$ für hinreichend großes i . Man bezeichnet $R(\eta)$ als das Radikal von η ; in der Faktorgruppe $L/R(\eta)$ definiert η einen Isomorphismus. Induziert η sogar einen Automorphismus von $L/R(\eta)$, so nennt Verf. den Endomorphismus η auf-

spaltend („splitting“), wenn in L eine (i. a. weder normale noch eindeutig bestimmte), zu $R(\eta)$ komplementäre Untergruppe S existiert, die der Gleichung $S \cdot \eta = S$ genügt und die die Eigenschaft besitzt, daß in jeder Klasse von $L/R(\eta)$ genau ein zu S gehöriger Repräsentant liegt [$L = R(\eta) + S$, $R(\eta) \cap S = 0$]. Es werden Kriterien dafür aufgestellt, daß ein Endomorphismus „allgemein“, d. h. nicht nur für L , sondern auch für jede der Bedingung $M \cdot \eta = M$ genügende Untergruppe M von L aufspaltend ist. Dabei wird zwischen individuellen Kriterien unterschieden, die sich auf Eigenschaften eines speziellen Endomorphismus beziehen, und allgemeinen Kriterien, die ganze Klassen von Endomorphismen erfassen, und die im wesentlichen die Gültigkeit gewisser Kettenbedingungen für geeignete Untergruppen von L fordern. — Mannigfache Anwendungen dieser Begriffsbildungen und Ergebnisse sollen in weiteren Veröffentlichungen behandelt werden. Vgl. insbesondere das unmittelbar folgende Referat. Krull (Bonn).

Baer, Reinhold: Endomorphism rings of operator loops. Trans. Amer. math. Soc. 61, 517—529 (1947).

Ausgehend von einer i. a. weder kommutativen noch assoziativen Gruppe L mit distributiven Linksoperatoren, betrachtet Verf. die Menge Θ aller der Endomorphismen ϑ , die L in eine feste kommutative Untergruppe A abbilden. Für die ϑ aus Θ ist nicht nur die Multiplikation, sondern auch die Addition in üblicher Weise definierbar, die Menge Θ bildet also einen Ring, dessen Aufbau von der Lage von A in L abhängt. In den ersten vier Nummern der Arbeit werden u. a. die in Θ auftretenden Idempotente gruppentheoretisch charakterisiert, es werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz einer Rechts- bzw. Linkseinheit in Θ aufgestellt, und es wird der wichtige Begriff des Nilisomorphismus eingeführt. Nummer 5 behandelt dann aufspaltende Endomorphismen in dem Sinne, wie sie in der oben besprochenen Arbeit des Verf. definiert werden, und in Nummer 6 wendet sich die Betrachtung solchen Ringen Θ zu, in denen alle auflösenden Endomorphismen ϑ aufspaltend sind. Es wird gezeigt, daß derartige Ringe manche Eigenschaften besitzen, die gewöhnlich nur unter Voraussetzung von Kettenbedingungen für die Θ -Ideale bewiesen werden. Insbesondere ergibt sich, daß die Rechtsquasiregularität im Sinne von Perlis [Bull. Amer. math. Soc. 48, 128—132 (1942)] stets die Linksregularität nach sich zieht, und daß das Jacobson'sche Radikal von Θ das Vereinigungsideal aller der Rechtsideale wird, die keine von 0 verschiedenen Idempotente enthalten. Krull (Bonn).

Zappa, Guido: Sulla condizione perchè un omomorfismo ordinario sia anche un omomorfismo strutturale. Giorn. mat. Battaglini, IV. S. 78, 182—192 (1949).

Eine eindeutige Abbildung σ der Untergruppen der Gruppe G auf die Untergruppen der Gruppe H heiße ein oberer Hemitropismus, wenn $(ST)^\sigma = S^\sigma T^\sigma$ für Untergruppen S, T von G gilt [XY = Kompositum der Untergruppen X, Y]; und σ heiße unterer Hemitropismus, wenn stets $(S \cap T)^\sigma = S^\sigma \cap T^\sigma$ erfüllt ist. Homomorphismen von G auf H induzieren obere Hemitropismen; und derartige Hemitropismen werden als typische bezeichnet. Entsprechend haben die typischen unteren Hemitropismen die Form $S^\sigma = (T \cap S)^{\sigma'}$, wo T eine feste Untergruppe von G und σ' ein fester Isomorphismus von T ist. Verf. beweist dann die folgenden beiden wichtigen und interessanten Sätze: A. Dann und nur dann existiert eine Abbildung σ der Untergruppen der endlichen Gruppe G auf die Untergruppen von H , die gleichzeitig oberer und unterer typischer Hemitropismus ist, wenn $G = N \times M$ gilt, wo N und M teilerfremde Ordnung haben und $M \simeq H$ gilt. — B. Sei N ein Normalteiler der endlichen Gruppe G und σ der natürliche [typische obere] Hemitropismus von G auf G/N [der also die Untergruppe S von G auf die Untergruppe $(NS)/N = S^\sigma$ von G/N abbildet]. Dann und nur dann ist σ ein unterer Hemitropismus, wenn es eine direkte Produktzerlegung $G = T \times H$ mit folgenden Eigenschaften gibt: (1) $H \subseteq N$; (2) die Ordnung von H ist der größte zum Index

$[G:N]$ teilerfremde Teiler der Ordnung von N ; (3) $T \cap N$ ist zyklisch und im Zentrum von T enthalten; (4) jede $T_p \cap N \neq 1$ erfüllende Sylow-Untergruppe T_p von T ist entweder zyklisch oder eine Diedergruppe.

Reinhold Baer (Urbana, Ill.).

Tartakovskij, V. A.: Die Siebmethode in der Gruppentheorie. Mat. Sbornik, n. S. 25 (67), 3—50 (1949) [Russisch].

Das Rechnen in einer Gruppe \mathcal{G} , die durch endlich viele erzeugende Elemente und definierende Relationen gegeben ist, beherrscht man vollständig, wenn man von jedem Wort entscheiden kann, ob es gleich dem Einselement ist. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, einen Algorithmus (Siebverfahren) aufzustellen, der nach endlich vielen Schritten diese Entscheidung gestattet. — Da hauptsächlich diejenigen Wörter interessieren, die gleich dem Einselement sind, werden sog. zyklische Wörter betrachtet, aus denen ein Wort im üblichen Sinne (lineares Wort) durch Zerschneiden an irgendeiner Stelle entsteht. Für zyklische Wörter wird eine Komposition definiert. Um zwei Wörter zusammenzusetzen, werden diese an zwei Stellen zerschnitten, die entstehenden linearen Wörter hintereinandergesetzt, und das Ganze wird dann wieder als Zyklus betrachtet. Diese Komposition hängt natürlich noch von den Zerschneidungsstellen ab, jedoch erweist sich diese Abhängigkeit als weniger wichtig. Genauere Untersuchung erfordert die Bildung derartiger Produkte aus mehr als zwei Faktoren entsprechend den verschiedenen Möglichkeiten, die Faktoren zusammenzufassen. Ferner wird die Verteilung der zu den einzelnen Faktoren gehörigen Abschnitte im fertigen Kompositum betrachtet. — In der Gesamtheit $\Pi(\mathcal{G})$ aller in gewisser Weise vereinfachten (gekürzten) Wörter wird eine lexikographische Anordnung definiert. Da jede im Sinne dieser Anordnung fallende Folge voneinander verschiedener Wörter endlich ist, ergibt sich zunächst eine kanonische Darstellung jedes Elementes von \mathcal{G} durch die erzeugenden Elemente. Ferner gestattet die lexikographische Anordnung und die Betrachtung von Wortmengen der Form $XR'V$ mit einem festen Wort R und beliebigen Wörtern X, V eine gewisse Übersicht über $\Pi(\mathcal{G})$ und vor allem über den Aufbau aller Wörter, die gleich dem Einselement sind. Wesentlich ist, daß man diese Übersicht schon gewinnt, wenn man von den sog. einfachen Wörtern ausgeht, die durch Komposition der definierenden Wörter und ihrer Inversen entstehen. $\Pi(\mathcal{G})$ kann in groben Zügen folgendermaßen erhalten werden: Unter P^{-1} verstehe man dasjenige Wort, welches aus P im wesentlichen dadurch entsteht, daß man das inverse Wort in verkehrter Reihenfolge bildet. Für ein lineares Wort R , welches gleich dem Einselement ist, betrachtet man alle möglichen Zerlegungen $R = R' R''$ mit $R' > R''^{-1}$ (im Sinne der lexikographischen Anordnung) und für jede solche Zerlegung alle Wörter $XR'V$. Diese Wortmenge heißt das Linksbüschel von R . Den Linkstern eines zyklischen Wortes, welches gleich dem Einselement ist, erhält man, indem man es auf alle möglichen Arten in ein lineares Wort zerschneidet, für jedes dieser linearen Wörter das Linksbüschel bildet und die mengentheoretische Summe aller dieser Linksbüschel nimmt. Den Rechtsstern erhält man durch Bildung des Linksternes für das inverse Wort. Die Summe von Links- und Rechtsstern heißt Stern. $\Pi(\mathcal{G})$ erweist sich als die Summe der Sterne aller einfachen Wörter. — Für eine genauere Formulierung der Resultate muß auf die Arbeit selbst verwiesen werden.

R. Kochendörffer (Greifswald).

Artin, Emil: The free product of groups. Amer. J. Math. 69, 1—4 (1947).

A new method of defining the free product of the groups of a given system, differing from the classical way in that here „the associative law is obvious, and all the difficulties arise from the discussion of equality“. a_1, a_2, \dots denote elements of the given groups; A, B, \dots denote formal products, $A = a_1 a_2 \cdots a_n$ (consecutive factors need not belong to different groups); A^{-1} is written for the formal product $a_n^{-1} a_{n-1}^{-1} \cdots a_1^{-1}$, E for the empty product. No simplification is allowed:

two products are equal if, and only if, they are identical. Multiplication is defined in the obvious manner, and the associative law is self-evident. — If all the a_i in A belong to the same group, and if their formal product computed in the group is the unit, A is called „elementary“. A subset Δ of the set of all formal words is defined inductively: (1) $E \in \Delta$; (2) If $A \neq E$, then $A \in \Delta$ if, and only if, A is of the form $A = A_0 a_1 A_1 a_2 \cdots a_n A_n$, where all $A_i \in \Delta$ and the formal product $a_1 a_2 \cdots a_n$ is elementary. Congruence with respect to Δ is defined by $A \equiv B$ if, and only if, $A B^{-1} \in \Delta$. This is shown to be an equivalence relation with the property: If $A \equiv B$, $C \equiv D$, then $AC \equiv BD$. With multiplication of the classes of congruent formal products defined accordingly, these classes may now be shown to form a group with Δ as unit element. Hanna Neumann (Hull).

Wielandt, Helmut: Zur Theorie der einfach transitiven Permutationsgruppen. II. Math. Z., Berlin 52, 384—393 (1949).

Schur's method to investigate permutation groups containing a regular subgroup \mathfrak{S} of the same degree [S.-B. preuss. Akad. Wiss. H. 18/20, 598—623 (1933); this Zbl. 7, 149], used previously by the author [Math. Z. 40, 582—587 (1935); this Zbl. 12, 343] is developed further to be applied also to the case of non-abelian \mathfrak{S} . — The first paragraph contains a study of S -rings, interesting in itself: Let \mathfrak{S} be an arbitrary finite group of order n , H its group ring. An „ S -ring over \mathfrak{S} “ is a subring of H with the properties (1) it contains the sum of all elements of \mathfrak{S} , i. e. the element $\sum_e H_e$ where H_e runs through all elements of \mathfrak{S} ; (2) with every $\alpha = \sum_e c_e H_e$

it also contains $\alpha^* = \sum_e c_e H_e^{-1}$; (3) with every $\alpha = \sum_e c_e H_e$ it contains the „simple parts“ (einfache Bestandteile) of α , i. e. the sum of all those elements H_e which appear in α with the same coefficient c_e . An S -ring is called primitive if there are just two subgroups of \mathfrak{S} such that the sum of their elements belongs to the S -ring (That these are then necessarily the two trivial subgroups of \mathfrak{S} follows). There exists at least one primitive S -ring over every group \mathfrak{S} of order $n > 1$, viz. the ring T_0 of all elements of the form $aE + b \sum_e H_e$ where E is the unit of \mathfrak{S} and H_e runs through all elements $\neq E$ of \mathfrak{S} . If this is the only primitive S -ring over \mathfrak{S} , then it certainly follows from Schur's results (loc. cit. §§ 2, 3) that any primitive permutation group of degree n which contains a regular subgroup isomorphic with \mathfrak{S} is doubly transitive. — The remaining, and greater, part of the paper is devoted to the proof that the only primitive S -ring over a dihedral group of order $n \geq 4$ is the ring T_0 . Thus: Every primitive permutation group of degree $n \geq 4$ which contains a regular dihedral group of order n is doubly transitive. Hanna Neumann.

Jordan, Pascual: Zur Begründung der Darstellungstheorie endlicher Gruppen. Z. Naturforsch. 3a, 522—523 (1948).

Für den Satz, daß jede irreduzible unitäre Gruppe G von Matrizen n -ter Ordnung mit komplexen Koeffizienten n^2 linear unabhängige Matrizen enthält, wird ein gegenüber der Literatur vereinfachter Beweis gegeben, der darauf beruht, daß der von G erzeugte Ring R linearer Transformationen einen Antiautomorphismus σ mit folgenden Eigenschaften besitzt: $(aA)^\sigma = aA^\sigma$ für komplexes a und A in R ; aus $\sum_{i=1}^k A_i A_i^\sigma = 0$ mit A_i in R folgt $A_1 = \dots = A_k = 0$. Baer.

Borel, Armand: Some remarks about Lie groups transitive on spheres and tori. Bull. Amer. math. Soc. 55, 580—587 (1949).

Die kompakte zusammenhängende Liesche Gruppe \mathfrak{G} wirke treu und transitiv auf den n -dimensionalen Wirkungsraum W mit den Bettischen Zahlen B_μ . 1. Ist $B_\mu = \binom{n}{\mu}$ für irgendein festes μ ($0 < \mu < n$), so ist W homöomorph dem Torus T^n , und \mathfrak{G} ist isomorph der Torusgruppe \mathfrak{T}^n . Durch die Theorie der Integralinvarianten

von E. Cartan und G. de Rham wird dieses Theorem auf den elementaren Satz reduziert: Wenn in einer $n \cdot n$ -Matrix A alle μ -reihigen Hauptminoren die Determinante 1 haben, alle übrigen μ -reihigen Minoren aber verschwinden, so ist $A = \pm E$. 2. Wenn die Eulersche Charakteristik $\chi(W) = \sum (-1)^r B_r$ eine Primzahl ist, so ist \mathcal{G} eine einfache Gruppe. 3. Für $\chi(W) = 2$ ist W einer Sphäre gerader Dimension homöomorph. \mathcal{G} wird genau angegeben. 4. Es wird die Bestimmung aller maximalen zusammenhängenden Untergruppen aller einfachen Lieschen Gruppen angekündigt und darauf fußend die Bestimmung aller W mit $\chi(W) = \text{Primzahl}$ durchgeführt. — Durch diese Arbeit werden Untersuchungen von D. Montgomery und H. Samelson [Bull. Amer. math. Soc. **49**, 307—313 (1943); Ann. Math., Princeton, II. S. **44**, 454—470 (1943)] fortgesetzt und neu hergeleitet. Ernst Witt (Hamburg).

Mal'cev, A. I.: Über eine Klasse homogener Räume. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **13**, 9—32 (1949) [Russisch].

Le but de cet article est de donner une classification des espaces homogènes associés aux groupes de Lie nilpotents. Il contient les résultats suivants. Appelons variété nilpotente tout espace homogène compact G/H où G est un groupe de Lie nilpotent connexe; alors l'A. démontre tout d'abord que tout espace homogène relatif à un groupe nilpotent connexe est le produit topologique d'une variété nilpotente par un espace euclidien; de plus toute variété nilpotente est de la forme G/D où D est un sous-groupe discret, et G simplement connexe. Maintenant, si G est un groupe nilpotent connexe et simplement connexe, et D un sous-groupe discret de G tel que G/D soit compact, il existe dans G un certain nombre de sous-groupes à un paramètre $d_i(t)$ ($1 \leq i \leq r$) tels que a) tout élément de G est de la forme $d_1(t_1) \cdots d_r(t_r)$; b) les éléments de la forme $d_i(t_i) \cdots d_r(t_r)$ forment un sous-groupe invariant fermé de G ; c) D est engendré par les éléments $d_i(1)$. Si pour un $u \in G$ on note $t_i(u)$ ses „coordonnées“ sur les sous-groupes $d_i(t)$, on peut de plus supposer que, pour u et $v \in G$, les $t_i(uv)$ sont des polynômes en les $t_j(u)$ et $t_k(v)$; de là résulte le théorème suivant: si G et G' sont deux groupes de Lie nilpotents connexes et simplement connexes, et si D et D' sont deux sous-groupes discrets tels que G/D et G'/D' soient compacts, alors tout isomorphisme de D sur D' est prolongeable en un isomorphisme topologique de G sur G' . Comme corollaire: pour que deux variétés nilpotentes soient isomorphes, il faut il suffit qu'elles aient même groupe fondamental, puisque le groupe fondamental de G/D est évidemment D . L'A. démontre ensuite que tout groupe (abstrait) nilpotent à un nombre fini de générateurs et ne contenant pas d'élément d'ordre fini peut être considéré comme le groupe fondamental d'une variété nilpotente. Soit enfin G un groupe de Lie nilpotent connexe et simplement connexe; pour que G admette un sous-groupe discret D tel que G/D soit compact, il est nécessaire et suffisant que son algèbre de Lie soit rationnelle (i. e. que, pour une base convenable, ses constantes de structure soient des nombres rationnels).

R. Godement (Nancy).

Mal'cev, A. I.: Nilpotente Gruppen ohne Torsion. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. **13**, 201—212 (1949) [Russisch].

Für das Verständnis der topologischen Methoden dieser Arbeit ist die Kenntnis einer vorangehenden Arbeit desselben Verf. erforderlich (vorsteh. Referat). — Eine unendliche Gruppe heißt nilpotent, wenn sie eine aufsteigende Zentralreihe endlicher Länge, und torsionsfrei (oder rein), wenn sie keine Elemente endlicher Ordnung $\neq 1$ besitzt. In nilpotenten torsions-freien Gruppen ist die Lösung einer Gleichung $x^n = g$, wenn überhaupt möglich, dann eindeutig; wenn sie immer möglich ist, heißt die Gruppe vollständig. Verf. beweist, daß sich jede nilpotente torsions-freie Gruppe, wenn sie nicht vollständig ist, vervollständigen, d. h. in eine vollständige Gruppe einbetten läßt. Durch eine Minimal-Forderung wird die Vervollständigung, abgesehen von Isomorphismen, eindeutig. Normalteiler gehen hierbei in Normalteiler, und das Zentrum in das Zentrum, über. Verf. stellt ferner eine ein-eindeutige

Beziehung zwischen vollständigen, nilpotenten, torsions-freien Gruppen endlichen Ranges [im Sinne der Arbeit des Verf., Mat. Sbornik, n. S. 22, 351—352 (1948)] und Lie-Algebren endlicher Ordnung über dem Körper der rationalen Zahlen her.

K. A. Hirsch (Newcastle-upon-Tyne).

Chih Ta, Yen: Les représentations linéaires de certains groupes et les nombres de Betti des espaces homogènes symétriques. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1367—1369 (1949).

Die Berechnung der Bettischen Zahlen homogener symmetrischer Räume führt in vielen Fällen auf das Problem, $\mathfrak{D}_{[s]}$ in irreduzible Bestandteile zu zerlegen. Hierbei sei \mathfrak{D} eine vorgelegte Darstellung einer halbeinfachen komplexen Lieschen Gruppe in einem Vektorraum, und $\mathfrak{D}_{[s]}$ die im Raum der alternierenden Tensoren s -ter Stufe induzierte Darstellung. Dies Reduktionsproblem ist zwar durch die Weylsche Charakterentheorie generell gelöst, aber die Ausführung der dazu notwendigen endlich vielen Schritte ist doch oft im gegebenen Fall aus irdischen Gründen unmöglich, und man ist auf Kunstgriffe angewiesen. Verf. skizziert nun, auf welche Weise er den Fall der 56-reihigen Darstellung \mathfrak{D} der einfachen Gruppe E_7 von 133 Parametern bewältigt hat ($s \leq 11$).

Ernst Witt (Hamburg).

Chih-Ta, Yen: Sur les polynomes de Poincaré des groupes simples exceptionnels. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 628—630 (1949).

Das Poincarésche Polynom $P_A(x) = \sum a_\nu x^\nu$ aus den Bettischen Zahlen a_ν einer Mannigfaltigkeit A gibt eine erste Antwort auf die Frage nach der topologischen Gestalt von A . Insbesondere hat man sich bemüht, P_A für kompakte Liesche Gruppen A zu bestimmen, und wegen $P_{A \times B} = P_A \cdot P_B$ braucht man P_A nur für einfache Gruppen zu bestimmen. Für die 4 großen Serien einfacher Gruppen haben verschiedene Autoren auf verschiedene Weise P_A bestimmt, ebenso war P_{E_7} bekannt. Wenn auch E. Cartan eine alle kompakten Lieschen Gruppen umfassende Formel angegeben hat, nach der man in endlich vielen Schritten P_A numerisch ermitteln könnte, so ist doch dieses Verfahren praktisch nicht ausführbar. Auf Grund einer von Hirsch inzwischen entdeckten Formel (und der Erwägungen des vorangehenden Referats) ist es nun dem Verf. gelungen, P_A auch für die 4 noch ausstehenden einfachen Gruppen zu bestimmen. — In der kompakten Lieschen Gruppe A sei B eine Untergruppe gleichen Ranges, $P_A = \prod (1 + x^{2\alpha_\nu - 1})$, $P_B = \prod (1 + x^{2\beta_\nu - 1})$, so ist für den homogenen Raum A/B $P_{A/B} = \prod (1 - x^{2\alpha_\nu}) : \prod (1 - x^{2\beta_\nu})$. Dies ist die erwähnte Formel von Hirsch. — Für die einfachen kompakten Lieschen Gruppen A sieht die nunmehr vollständige Liste der $P_A = \prod (1 + x^{\gamma_\nu})$ ($\nu = 1, \dots, n$) bzw. der Exponenten γ_ν so aus:

$$P_{L_n} = \prod (1 + x^{2\nu+1}), \quad P_{K_n} = P_{O'_n} = \prod (1 + x^{4\nu-1}), \quad P_{O_n} = (1 + x^{2n-1}) \cdot P_{O'_{n-1}},$$

$$E_2: 3, 11 \qquad E_4: 3, 11, 15, 23 \qquad E_6: 3, 9, 11, 15, 17, 23$$

$$E_7: 3, 11, 15, 19, 23, 27, 35 \qquad E_8: 3, 15, 23, 27, 35, 39, 47, 59.$$

Ernst Witt (Hamburg).

Iwasawa, Kenkichi: On some types of topological groups. Ann. Math., Princeton, II. S. 50, 507—558 (1949).

Voici les principaux résultats obtenus dans ce travail. § 1. Soient K un groupe compact, $A(K)$ le groupe des automorphismes de K , $I(K)$ le groupe des automorphismes intérieurs de K ; alors le groupe $A(K)/I(K)$ est totalement discontinu. Corollaire: si un groupe connexe G contient un sous-groupe invariant compact K , on a $G = HK$ où H est le sous-groupe des $x \in G$ tels que $xy = yx$ pour tout $y \in K$. § 2. G étant un groupe topologique, on note $D_1(G)$ le sous-groupe fermé engendré par les commutateurs des éléments de G , et on définit de façon évidente la suite (transfinie) des sous-groupes commutateurs $D_\alpha(G)$ de G ; cette suite possède un élément minimal; s'il est réduit à l'unité, on dit que G est (topologiquement) résoluble. Théorème: si G est localement compact connexe, on a $D_n(G) = \{e\}$ pour un entier n fini. § 3. Cette section concerne essentiellement les groupes de Lie, et a pour but de prouver deux résultats fondamentaux. 1) si G est un groupe de Lie connexe, ses sous-groupes compacts maximaux sont connexes et conjugués entre eux; si K est l'un d'entre eux, il existe des sous-groupes à un paramètre

H_1, \dots, H_r tels que tout $g \in G$ admet une représentation $g = h_1 \dots h_r k$ ($h_i \in H_i$; $k \in K$), les h_i et k étant uniques et fonctions continues de g . Ce théorème avait déjà été annoncé par A. Malcev [Mat. Sbornik, n. S. 16, 163—189 (1945)]. Dans le cours de la démonstration de ce théorème, plusieurs résultats intéressants sont prouvés; par exemple: si un groupe localement compact G contient un sous-groupe invariant N isomorphe à R^n , et si G/N est compact, alors G contient un sous-groupe compact K isomorphe à G/N tel que $G = K \cdot N$, K étant de plus déterminé à un automorphisme intérieur près dans G ; si G est le groupe adjoint d'un groupe de Lie semi-simple réel, G contient un sous-groupe compact maximal K et un sous-groupe résoluble H , homéomorphe à un espace euclidien, et tel que $G = HK$, $H \cap K = \{e\}$ (bien entendu, un résultat analogue mais un peu moins simple vaut pour tout groupe semi-simple). Les démonstrations de ces théorèmes utilisent soit la technique des algèbres de Lie, soit celle de la mesure de Haar combinée plus ou moins implicitement avec des méthodes d'espaces fibrés. 2) Si un groupe localement compact G contient un sous-groupe de Lie N tel que G/N soit aussi un groupe de Lie, alors G est lui-même un groupe de Lie. Ici encore l'A. utilise essentiellement la mesure de Haar et les espaces fibrés. § 4. On dit qu'un groupe localement G est un (L) -groupe s'il possède un système „complet“ de sous-groupes invariants fermés N_i tels que les G/N_i soient des groupes de Lie. Dans un (L) -groupe connexe il existe un sous-groupe compact invariant maximal K , et G/K est un groupe de Lie. La classe des (L) -groupes connexes est invariante par les opérations suivantes: a) formation d'un sous-groupe fermé; b) formation d'un groupe quotient; c) extension d'un (L) -groupe par un autre. Tout groupe résoluble localement compact et connexe est un (L) -groupe. Un (L) -groupe connexe est localement le produit direct d'un sous-groupe compact „arbitrairement petit“ et d'un noyau de groupe de Lie, et réciproquement. Le théorème de Malcev (§ 3) est vrai pour les (L) -groupes connexes; enfin, le cinquième problème de Hilbert admet une réponse affirmative pour cette classe de groupes. § 5. Dans un groupe localement compact arbitraire, il existe un sous-groupe invariant compact connexe qui contient tous les autres; dans un groupe localement compact connexe G , il existe de même un sous-groupe invariant résoluble qui contient tous les autres; la composante connexe de ce sous-groupe étant notée $R(G)$, on dira que G est un (C) -groupe si $G/R(G)$ est compact. Un tel groupe est localement le produit direct d'un groupe compact et d'un noyau de groupe de Lie; dans un groupe localement compact connexe G , il existe un plus grand sous-groupe invariant du type (C) , de même en remplaçant (C) par (L) . L'A. termine en énonçant quelques conjectures, en particulier que tout groupe localement compact connexe est un (L) -groupe, laquelle est équivalente à la suivante: tout groupe localement compact connexe et simple est un groupe de Lie. On peut considérer, en d'autres termes, qu'après tous les résultats contenus dans cet article, la résolution du cinquième problème de Hilbert est ramenée au cas des groupes simples: ce qui indique l'importance de ces résultats. Bien entendu, il ne suit pas de là que ce problème soit maintenant trivial! Il est probable en fait que, Iwasawa ayant exploité systématiquement l'existence dans les groupes étudiés de sous-groupes invariants, des procédés entièrement nouveaux seront nécessaires pour aborder les groupes simples. — En ce qui concerne les démonstrations, elles sont souvent fort originales; il serait toutefois intéressant de les simplifier (ce qui semble en partie possible, par une utilisation plus systématique de la théorie des espaces fibrés notamment); dans l'état actuel, on ne saurait mieux les décrire qu'en citant l'A. lui-même: „We shall reduce the proof step by step to the case where K has a more simple structure“.

R. Godement (Nancy).

Verbände. Ringe. Körper:

Birkhoff, Garrett: Théorie et applications des treillis. Ann. Inst. Henri Poincaré 11, 227—240 (1949).

In zwei Vorträgen (vgl. nachsteh. Referat) schildert Verf. die fundamentale Bedeutung der Verbandstheorie für die moderne Mathematik. Nach den teilweise geordneten Mengen werden die Verbände besprochen. Es werden hervorgehoben die vollständigen, modularen, halb-modularen, komplementären und distributiven Verbände.

Lorenzen (Bonn).

Birkhoff, Garrett: Groupes réticulés. Ann. Inst. Henri Poincaré 11, 241—250 (1949).

Verbandstheorie und Gruppentheorie vereinigen sich in der Theorie der Verbandsguppen. Beispiele liefern die Ideale gewisser Integritätsbereiche (im allgemeinen bilden die Ideale nur eine Verbandshalbgruppe). Ähnlich ist es mit den 2-stelligen Relationen über einer Menge. — Ausführlicher behandelt Verf. die (additiven) Verbandsguppen aus reellen Funktionen. Hier treten die reellen Zahlen als lineare Operatoren auf (Vektorverbände). Für die Wahrscheinlichkeitstheorie sind die beschränkten reellen Funktionen über einem Booleschen Verband wichtig.

Diese bilden einen Banach-Raum, der zugleich eine Verbandsgruppe ist. Die Konvergenz läßt sich verbandstheoretisch nach Moore definieren. *Lorenzen (Bonn).*

Baer, Reinhold: The double chain condition in cyclic operator groups. *Amer. J. Math.* **69**, 37—45 (1947).

Nach Hopkins gilt in Ringen mit Einselement der Satz, daß die Maximalbedingung für Rechtsideale (zulässige Untergruppen) eine Konsequenz der Minimalbedingung ist. Verf. zeigt durch ein Gegenbeispiel, daß dieser Satz nicht für zyklische M -Gruppen \mathfrak{A} gilt. Hierbei ist \mathfrak{A} eine abelsche Gruppe, die das System M von Operatoren zuläßt. Eine M -Gruppe heißt zyklisch, wenn sie aus einem Element unter M erzeugt werden kann. Eine M -Gruppe hat den Rang r , wenn jede endliche Teilmenge von Elementen in einer aus höchstens r Elementen erzeugbaren M -Untergruppe liegt. Verf. findet folgende Verallgemeinerung des oben erwähnten Satzes von Hopkins: M sei ein Ring mit Einselement und $\mathfrak{A} = gM$ eine zyklische M -Gruppe. Ist Z ein Unterring von M und $x \in \mathfrak{A}$, so bestehe $Q(x, Z)$ aus allen $z \in Z$, für die $xz = 0$ ist. Dann gilt für die M -Untergruppen von \mathfrak{A} der Doppelkettensatz, wenn in \mathfrak{A} ein Unterring Z mit folgenden Eigenschaften existiert: 1. $MQ(g, Z) \leq Q(g, Z)M$. 2. Die Z -Untergruppen von gZ erfüllen die Minimalbedingung. 3. M hat endlichen Rang über Z . *Grün (Berlin).*

Fuchs, Ladislaus: Some theorems on algebraic rings. *Acta math.*, Uppsala **81**, 285—289 (1949).

Einige Sätze von T. Nagell [*Math. Z.* **34**, 179—182 (1931); dies. Zbl. **2**, 326] über algebraische Ringe werden auf den Fall relativ-algebraischer Ringe ausgedehnt. Als wesentlichstes Resultat ergibt sich die Darstellung

$$d_{\mathfrak{o}|\mathfrak{r}} = \frac{1}{c^{2n}} (\mathfrak{L}_1 \dots \mathfrak{L}_n)^2 D(\xi)$$

der Relativediskriminante $d_{\mathfrak{o}|\mathfrak{r}}$ eines zum endlichen algebraischen Erweiterungskörper K über dem Körper k mit der Hauptordnung \mathfrak{r} gehörigen, das primitive Element ξ von K/k enthaltenden Ringes \mathfrak{o} aus \mathfrak{r} -ganzen Elementen von K durch die Relativediskriminante $D(\xi)$ von ξ , eine durch ξ und eine im wesentlichen willkürliche feste k -Basis $\omega_1, \dots, \omega_n$ von K/k zu definierende Determinante c mit Elementen aus \mathfrak{r} und gewisse durch \mathfrak{o} , ξ und $\omega_1, \dots, \omega_n$ in \mathfrak{r} bestimmte Ideale $\mathfrak{L}_1, \dots, \mathfrak{L}_n$. Zum Beweis wird ein vom Verf. in den *Comment. math. Helvetici* (dies. Zbl. **30**, 110) mitgeteiltes Resultat herangezogen. *Grell (Berlin).*

Brown, Bailey and Neal H. McCoy: Radicals and subdirect sums. *Amer. J. Math.* **69**, 46—58 (1947).

N. Jacobson [*Amer. J. Math.* **67**, 300—320 (1945)] definierte in beliebigen Ringen R ein Radikal N' als die Menge aller Elemente b , so daß jedes a aus dem durch b erzeugten Rechtsideal im Rechtsideal aller Elemente $ax - x$, x beliebig in R , liegt. Verff. erklären ein Radikal N als Gesamtheit aller b , für die jedes a aus dem zweiseitigen Ideal (b) im zweiseitigen Ideal $G(a)$, das durch alle $ax - x$ erzeugt wird, liegt. Es ist stets $N' \leq N$. Es gilt $N' = N$, wenn R kommutativ ist, ebenso wenn jede abnehmende Kette von Rechtsidealen in R abbricht. Ist $N = (0)$, so heißt R halbeinfach, ist $R = N$, so heißt R ein Radikalring. N ist stets der Durchschnitt aller zweiseitigen Ideale M , deren Restklassenring R/M einfach ist und ein Einselement besitzt. R ist dann und nur dann halbeinfach, wenn er isomorph der subdirekten Summe von einfachen Ringen mit Einselement ist. Hat R das Radikal N , so hat der Ring R_n der n -reihigen Matrizen mit Elementen aus R als Radikal N_n . Es wird ferner ein allgemeiner Radikalbegriff eingeführt, von dem das betrachtete Radikal N ein Sonderfall ist. Auch für dieses allgemeine Radikal lassen sich eine Reihe interessanter Aussagen machen. *G. Köthe (Mainz).*

Schafer, R. D.: Structure of genetic algebras. *Amer. J. Math.* **71**, 121—135 (1949). Verf. verallgemeinert Resultate von Etherington [*Proc. R. Soc. Edinburgh*

59, 242—258 (1939); Quart. J. Math. 12, 1—8 (1941); dies. Zbl. 27, 294; Proc. Edinburgh math. Soc., II. S. 6, 222—230 (1941)] über gewisse in der Genetik auftretende nichtassoziative Algebren. Zu diesem Zweck verwendet er folgende Definition: Es sei \mathfrak{A} eine kommutative Algebra über dem Körper F und $x \rightarrow \omega(x)$ ein Homomorphismus von \mathfrak{A} auf F . $\omega(x)$ heißt das „Gewicht“ von x . $T(\mathfrak{A})$ sei die „einhüllende“ Algebra der linearen Transformationen T , die durch Rechtsmultiplikation der Elemente von \mathfrak{A} mit festen Elementen aus \mathfrak{A} erzeugt werden. Wenn die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms $|\lambda I - T|$ nur durch die Gewichte $\omega(x_i)$ von den x_i abhängen, heißt \mathfrak{A} eine „genetische“ Algebra. Diese Definition ermöglicht eine Strukturtheorie, in die die „train“-Algebren von Etherington sich einordnen. Trost (Zürich).

Zahlentheorie:

Ross, W. Bruce: A chart of integral right triangles. Math. Mag., Texas 23, 110—114 (1949).

Gyires, B.: Über die Faktorisierung im Restklassenring mod m . Publ. Math., Debrecen 1, 51—55 (1949).

Es wird die Anzahl $N_r(a, m)$ der mod m inkongruenten Lösungen x_1, \dots, x_{r+1} der Kongruenz $a \equiv x_1 \cdots x_{r+1} \pmod{m}$ bestimmt. Dazu dienen folgende Formeln:

$$(1) \quad N_r(a, m) = N_r(d, m), \quad d = (a, m)$$

$$(2) \quad N_r(d, m) = N_r(p_1^{t_1}, p_1^{e_1}) \cdots N_r(p_n^{t_n}, p_n^{e_n}), \quad m = p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}, \quad d = p_1^{t_1} \cdots p_n^{t_n},$$

$$(3) \quad N_r(p^t, p^e) = \binom{t+r}{t} q^r(p^e) \quad (0 \leq t < e), \quad N_r(p^e, p^e) = \sum_{k=0}^r \binom{k+e-1}{k} p^{e(r-k)} q^k(p^e),$$

wo φ die Eulersche Funktion bezeichnet.

Trost (Zürich).

Bernhard, H. A.: On the least possible odd perfect number. Amer. math. Monthly 56, 628—629 (1949).

Ausgehend von der bekannten Struktur ungerader vollkommener Zahlen, d. h.

$$N_0 = p^{4\lambda+1} p_1^{2\beta_1} \cdots p_n^{2\beta_n}, \quad \lambda \geq 0, \text{ alle } \beta_v \geq 0 \quad (\lambda, \beta \text{ ganz}),$$

bemerkt Verf. unter Verwendung einiger weiterer bekannter Eigenschaften, nämlich $n \geq 4$, $(\beta_1, \dots, \beta_n) \neq (2, \dots, 2)$, $\beta_i \neq 4$ falls $\beta_1 = \dots = \beta_{i-1} = \beta_{i+1} = \dots = \beta_n = 2$, $N_0 \not\equiv 0 \pmod{3 \cdot 5 \cdot 7}$, daß unterhalb von 10^{10} (Zehn Milliarden) höchstens die beiden Zahlen $3^6 \cdot 5^2 \cdot 11^2 \cdot 13^2 \cdot 17$ und $3^6 \cdot 5^2 \cdot 11^2 \cdot 13 \cdot 17^2$ alle Bedingungen erfüllen. Wie direktes Nachrechnen zeigt, sind beide Zahlen jedoch abundant. Ostmann.

Venkataraman, C. S.: Classification of multiplicative functions of two arguments based on the identical equation. J. Indian math. Soc., n. S. 13, 17—22 (1949).

Eine zahlentheoretische Funktion $F(M, N)$ von zwei Argumenten heißt multiplikativ, falls $F(M, N) F(M', N') = F(MM', NN')$ für $(M, N, M', N') = 1$ [Vaidyanathaswamy, Trans. Amer. math. Soc. 33, 579—662 (1931); dies. Zbl. 2, 124]. Eine solche multiplikative Funktion läßt sich darstellen in der Gestalt

$$F(M, N) = F(M, 1) F(1, N) * C(M, N),$$

wo $*$ die Faltung $\sum F(d, 1) F(1, \delta) C(M/d, N/\delta)$ (erstreckt über sämtliche Teiler d von M und δ von N) von $F(M, 1) F(1, N)$ und $C(M, N)$ bedeutet. Die Funktion $C(M, N)$ ist durch $F(M, N)$ bestimmt [Verf., Proc. Indian Acad. Sci. A 24, 518—529 (1946)]. Nach den Eigenschaften dieser „Komponenten“ $C(M, N)$ betrachtet Verf. vier Klassen von multiplikativen Funktionen und beweist einige Eigenschaften dieser Klassen. Kloosterman (Leiden).

Cohen, Eckford: An extension of Ramanujan's sum. Duke math. J. 16, 85—90 (1949).

Verf. definiert eine Verallgemeinerung $c_q^s(n)$ der Ramanujanschen Summe $c_q(n)$ durch $c_q^s(n) = \sum e^{2\pi i n h/q^s}$, wobei n, q, s bestimmte natürliche Zahlen sind und

die Summation über alle solchen nichtnegativen Werte von h zu erstrecken ist, die $< q^s$ sind und keinen gemeinsamen Teiler ($\neq 1$), der eine s -te Potenz ist, mit q^s haben. Er beweist manche Eigenschaften dieser Summe, die als Verallgemeinerungen entsprechender Eigenschaften der Ramanujanschen Summe betrachtet werden können. Z. B. ist $c_q^s(n)$ eine multiplikative Funktion von q . Ähnliche Sätze gelten für eine, im Polynomring $GF[p^n, x]$ über dem Galois-Feld $GF(p^n)$ analogerweise gebildete Summe. Mit Hilfe der letzteren bestimmt Verf. von neuem die Anzahl der Lösungen einer Gleichung im $GF[p^n, x]$, die von L. Carlitz und von ihm in einer früheren Arbeit [dies. Zbl. 30, 103] schon untersucht wurde. Endlich behandelt Verf. ein ähnliches Problem im rationalen Zahlkörper. *T. Szele.*

Pall, Gordon: Representation by quadratic forms. Canadian J. Math. 1, 344—364 (1949).

Es sei A eine n -reihige und B_1 eine k -reihige ($1 \leq k \leq n$) Matrix, beide ganzzahlig, nicht-singulär und symmetrisch, und es sei $B_1 = T_1' A T_1$ eine primitive Darstellung von B_1 durch A (wo also die Unterdeterminanten k -ter Ordnung von T_1 den größten gemeinsamen Teiler 1 haben; T_1' ist die Transponierte der Matrix T_1). Es werde T_1 durch Hinzufügen von $n - k$ Spalten (die zusammen die Matrix T_2 bilden mögen) zu einer unimodularen (Determinante = 1) n -reihigen quadratischen Matrix $T = (T_1 T_2)$ ergänzt. Ist T_2 eine solche Ergänzung, so werden sämtliche Ergänzungen T_2^* dieser Art gegeben durch $T_2^* = T_1 H + T_2 U$, wo H ganz und U unimodular ist. Es sei $B = T' A T$, so daß $B = \begin{pmatrix} B_1 & K' \\ K & B_2 \end{pmatrix}$ mit $K = T_2' A T_1$, $B_2 = T_2' A T_2$. Durch „quadratisches Ergänzen“ werde B auf die Gestalt $P' B P = \begin{pmatrix} B_1 & 0' \\ 0 & b^{-1} G \end{pmatrix}$ transformiert, wo 0 eine Nullmatrix mit $n - k$ Reihen und k Spalten ist, b_1 die Determinante von B_1 und $G = b_1 B_2 - b_1 K B_1^{-1} K'$. Falls T_2 durch T_2^* ersetzt wird, so werden G und K durch $U' G U$ und $U' K + H' B_1$ ersetzt. Sind umgekehrt B_1 , G und K gegeben, so setze man $G + b_1 K B_1^{-1} K' = b B_2$, $B = \begin{pmatrix} B_1 & K' \\ K & B_2 \end{pmatrix}$. Falls nun $A \sim B$ ist, so sei T eine unimodulare Transformation von A in B . Ist T_1 die Matrix aus den ersten k Spalten von T , so erhält man in $W T_1$ (wo W die unimodularen Automorphismen von A durchläuft) eine (zu G , K gehörige) Schar von primitiven Darstellungen von B_1 durch A . Die Matrizen G und K müssen dabei der Kongruenz $K(b_1 B_1^{-1}) K' \equiv -G \pmod{b_1}$ genügen. Für $k = n - 1$ reduziert sich diese Matrizen-Kongruenz auf eine einzelne Zahlenkongruenz

$$\sum_{i,j=1}^n c_{ij} k_i k_j \equiv -a \pmod{b_1}, \quad \text{wo } b_1 B_1^{-1} = (c_{ij}), \quad K = (k_1, k_2, \dots, k_{n-1})$$

und a die Determinante von A ist. Durch das angegebene Verfahren erhält man in diesem Falle sämtliche primitiven Darstellungen von B_1 durch A , indem man zuerst die Lösungen $(k_1, k_2, \dots, k_{n-1})$ der letzteren Kongruenz bestimmt. Verf. wendet das Verfahren an auf die Bestimmung der Anzahl aller primitiven Darstellungen einer positiv-definiten, binären, quadratischen Form durch eine Summe von drei Quadraten. Es gelingt ihm dadurch eine Lücke auszufüllen in dem Beweis eines Satzes von U. V. Linnik [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 4, 363—402 (1940); dies. Zbl. 24, 250] über die Darstellbarkeit von großen Zahlen durch die einzelnen Klassen eines Geschlechts von ternären quadratischen Formen (dieser Satz wurde von Linnik benutzt [Mat. Sbornik, n. S. 12, 218—224 (1943)], um die Darstellbarkeit aller genügend großen ganzen Zahlen als eine Summe von 7 Kuben zu beweisen).

Kloosterman (Leiden).

Durfee, William H.: Quadratic forms over fields with a valuation. Bull. Amer. math. Soc. 54, 338—351 (1948).

Es werden quadratische Formen in diskret bewerteten Körpern betrachtet. Dabei wird der Fall der Charakteristik 2 außer acht gelassen, weil Verf. nur Normal-

formen mit rein quadratischen Gliedern verwendet, was ganz unnötig ist, da eine für alle Körper brauchbare Normalform für quadratische Formen vom Ref. schon im Anschluß an den Vortrag auf dem internationalen Mathematikertag in Zürich entwickelt und am 14. 9. 36 in dem Vortrag in Bad Salzbrunn mitgeteilt worden ist (dies. Zbl. 17, 196). Verf. lehnt sich bei seinen Untersuchungen eng an die Hasse'schen Abhandlungen [J. reine angew. Math. 152, 205—224 (1923) und 153, 158—162 (1924)] an und kommt trotz allgemeinerer Voraussetzungen zu ähnlichen Resultaten.

Brandt (Halle):

James, R. D.: Recent progress in the Goldbach problem. Bull. Amer. math. Soc. 55, 246—260 (1949).

Verf. gibt einen Überblick über den gegenwärtigen Stand des Goldbach-Problems und zugleich in verständlicher Form Beweisskizzen der verschiedenen Methoden, mit denen das Problem bislang in Angriff genommen wurde. Als erstes wird das „Siebverfahren“ besprochen, das auf Arbeiten von Brun, Rademacher, Estermann, Ricci, Buchstab fußt und deren letztes Ergebnis [Buchstab, C. r. Acad. Sci. URSS, n. S. 29, 544—548 (1940); dies. Zbl. 24, 292] lautet: Alle hinreichend großen Zahlen lassen sich als Summe von zwei solchen ganzen Zahlen darstellen, deren jede höchstens vier Primfaktoren besitzt. — Als nächstes wird das „Dichte-Verfahren“ behandelt, das auf Schnirelmann zurückgeht und das Siebverfahren zum Teil mitverwendet. In diesen Rahmen fallen Arbeiten von Landau, Heilbronn, Scherk, Ricci. Das erzielte Resultat lautet [Ricci, Ann. Scuola norm. sup., Pisa, II. S. 6, 91—116 (1937); dies. Zbl. 16, 102]: Jede hinreichend große Zahl ist Summe von höchstens 67 Primzahlen. — Eine ausgesprochen analytische Methode baut auf Arbeiten von Hardy und Littlewood auf. Ihr Hauptresultat erzielte Vinogradow [Mat. Sbornik, n. S. 2, 179—195 (1937); dies. Zbl. 16, 291]: Alle hinreichend großen Zahlen lassen sich als Summen von 3 Primzahlen darstellen. Die gleiche Methode liefert ferner das Ergebnis: Alle geraden Zahlen mit Ausnahme einer Teilmenge der (natürlichen) Dichte Null sind Summen von zwei Primzahlen. Neuere Beweise des Vinogradowschen Satzes stammen von Linnik [Mat. Sbornik, n. S. 19, 3—8 (1946)] und Tschudakoff [Ann. Math., Princeton, II. S. 48, 515—545 (1947)].

Ostmann (Marburg):

Mirsky, L.: A property of squarefree integers. J. Indian math. Soc., n. S. 13, 1—3 (1949).

Als Verallgemeinerung eines Estermannschen Satzes [Math. Ann., Berlin 105, 654—662 (1931)] beweist Verf.: Es seien $q_1, q_2, \dots, q_s, s \geq 1$, von Null verschiedene ganze Zahlen, \mathfrak{E} sei die Menge aller n mit quadratfreien $n^2 + q_\sigma$, $1 \leq \sigma \leq s, n \geq 1$ ganz. Dann ist entweder \mathfrak{E} leer oder hat eine positive asymptotische Dichte. — Genauer ergibt sich für die Anzahlfunktion $E(x)$ der Menge \mathfrak{E} für hinreichend große x

$$(*) \quad E(x) \geq \frac{x}{6c} - 2s \Pi(x+q) \geq \frac{x}{7c} \quad [\Pi(z) = \text{Anzahlfunktion der Primzahlmenge}].$$

Hierbei ist $q = \text{Max}(|q_1|, \dots, |q_s|)$, $c = \prod_{p \leq N} p^2$ (p Primzahl), wobei N so bestimmt

sei, daß $\sum_{p > N} \frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{6s}$ ausfällt. Aus (*) folgt offensichtlich als Abschätzung für die

asymptotische Dichte $\delta^*(\mathfrak{E}) = \lim_{x=1,2,\dots} \frac{E(x)}{x}$ sofort $\delta^*(\mathfrak{E}) \geq \frac{1}{6c}$, da s und q konstant sind (Anm. des Ref.). Zum Beweis untersucht Verf. die Anzahl der Lösungen der Kongruenz

$$(n_0 + mc)^2 + q_\sigma \equiv 0 \pmod{p^2} \quad (m \geq 0)$$

mit $n_0 + mc \leq x$ und bezeichnet diese Anzahl mit $F_\sigma(x, p)$ (n_0 sei dabei eine solche ganze Zahl, daß alle $n_0^2 + q_\sigma$, $\sigma = 1, \dots, s$, quadratfrei sind; ist $\mathfrak{E} \neq 0$, so existiert n_0 natürlich). Offensichtlich gilt $F_\sigma(x, p) = 0$, wenn $p \leq N$ oder $p > x + q$ ist. Im verbleibenden Fall ergibt sich leicht $F_\sigma(x, p) \leq 2x/cp^2 + 2$. Aus der Beziehung

$$E(x) \geq \sum_{\substack{n_0 + mc \leq x \\ \lambda \geq 0}} 1 - \sum_{\sigma=1}^s \sum_p F_\sigma(x, p) \geq \frac{x}{2c} - \sum_{\sigma=1}^s \sum_p F_\sigma(x, p) \quad (x > 2n_0)$$

folgt in ganz einfacher Rechnung die Behauptung.

Ostmann (Marburg).

Erdős, P.: On some applications of Brun's method. Acta Univ. Szeged., Acta Sci. math. 13, 57—63 (1949).

Es werde c_ν beliebig positiv gedacht, c'_ν sei eine gewisse positive Funktion von c_ν , ebenso c''_ν eine positive Funktion von c_ν , c'_ν . Ferner sei $0 < l < k$, $(l, k) = 1$ und $\varphi(k)$ die Eulersche Funktion. Durch Weiterführung der Methode, mit der Brun bewiesen hat, daß die Summe der reziproken Primzahlzwillinge konvergiert, wird hier folgendes gezeigt: Für die kleinste Primzahl $P(k, l)$ der Progression $kx + l$ gilt 1. $P(k, l) > (1 + c'_1) \varphi(k) \log k$ bei unendlich vielen k für mindestens $c'_1 \varphi(k)$ Werte von l ; 2. $P(k, l) < c_2 \varphi(k) \log k$ bei jedem k für mindestens $c'_2 \varphi(k)$ Werte von l . Es gibt lange Primzahlketten mit großen Abständen, d. h. 3. unterhalb $n > c'_3$ gibt es $[c'_3 \log n]$ direkt aufeinanderfolgende Primzahlen, deren Abstände $> c_3$ sind.

Ernst Witt (Hamburg).

Nyman, Bertil: A general prime number theorem. Acta math., Uppsala 81, 299—307 (1949).

Für eine monotone Folge reeller Zahlen $1 < y_1 < y_2 < \dots$ bilde man sämtliche Produkte $x = y_{n_1} y_{n_2} \dots y_{n_k}$ ($n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$) (1), und es werden diese Produkte ihrer Größe nach geordnet: $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots$, wobei jedes x ebenso oft hingeschrieben wird, als es durch Produkte (1) dargestellt werden kann. Es werden dann die y_n die Primzahlen der Folge x_n genannt. Es sei $N(x)$ die Anzahl der $x_n \leq x$; $\pi(x)$ die Anzahl der $y_n \leq x$ und $\zeta(s) = 1 + x_1^{-s} + x_2^{-s} + \dots$, wo $s = \sigma + it$. Verf. beweist, daß die folgenden drei Behauptungen äquivalent sind: A. Es gibt ein $a > 0$, derart daß für jedes $n > 0$ gilt:

$$N(x) = ax + O\left\{\frac{x}{(\log x)^n}\right\}, \quad \text{falls } x \rightarrow \infty.$$

B. Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem ganzen $n \geq 0$ gibt es eine Konstante A derart, daß

$$|\zeta^{(n)}(s)| < A |t|^\varepsilon, \quad \left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| < A |t|^\varepsilon$$

ist, gleichmäßig für $\sigma > 1$, $|t| \geq \varepsilon$. C. Für jedes positive n ist

$$\pi(x) = \text{Li}(x) + O\left\{\frac{x}{(\log x)^n}\right\},$$

falls $x \rightarrow \infty$.

Kloosterman (Leiden).

Rényi, Alfred: On the large sieve of Ju. V. Linnik. Compositio math., Groningen 8, 68—75 (1950).

Verf. hat in seiner Arbeit „On the representation of even numbers as the sum of a prime and an almost prime number“ [Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. math. 12, 57—78 (1948)] die Methode des großen Siebes von Linnik verallgemeinert und zur Herleitung bedeutender Sätze der analytischen Zahlentheorie benützt. Die vorliegende Arbeit stellt sich die Aufgabe, die Methode des großen Siebes wahrscheinlichkeits-theoretisch zu interpretieren und zu begründen. Es wird folgender Satz bewiesen: Es sei eine Folge von natürlichen Zahlen $n_1 < n_2 < \dots < n_z < N$ gegeben. Es seien weiter $f(p)$, $Q(p)$ positive Funktionen mit $f(p) < p$. Setzt man $\tau = \min \frac{f(p)}{p}$, $Q = \max Q(p)$ über alle $p < \sqrt[3]{\frac{N}{12}}$, und ist $z(p, k)$ die Anzahl der n_j ,

welche $\equiv k(p)$, so gilt für alle $p < \sqrt[3]{\frac{N}{12}}$, ausgenommen höchstens $\frac{2NQ^2}{z\tau}$

$$\left| z(p, k) - \frac{z}{p} \right| < \frac{z}{pQ(p)}$$

für jeden Rest k , ausgenommen höchstens $f(p)$ solche. Dieser Satz besagt, daß die n_j „fast gleichverteilt“ auf die verschiedenen Restklassen mod p für „fast alle“ $p < \sqrt[3]{\frac{N}{12}}$ aufgeteilt sind. — Einige Verallgemeinerungen werden noch angedeutet. *Hlawka*.

Linnik, Ju. V.: Über einen Ausdruck der L -Reihen durch die ζ -Funktion. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 57, 435—437 (1947) [Russisch].

Für eine in einer Halbebene $\Re(\omega) > k_0$ konvergente Dirichletreihe $A(\omega) = \sum a_n n^{-\omega}$ und die zugeordnete Reihe $A(\omega, \chi) = \sum a_n \chi(n) n^{-\omega}$ ergibt sich durch die Mellintransformation die Beziehung

$$\begin{aligned} e^{-2\pi i m/D} A(s, \chi, N) &= \sum a_n n^{-s} e^{-n/N} e^{-2\pi i m/D} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int A(\omega + s) \Gamma(\omega) \left(\frac{1}{N} + \frac{2\pi i m}{D} \right)^{-\omega} d\omega \end{aligned}$$

mit geeignetem gewähltem Integrationsweg. Eine bekannte Formel für Charaktere führt zu

$$\begin{aligned} 2\pi i \sqrt{D} A(s, \chi, N) &= \int A(\omega + s) \Gamma(\omega) \varepsilon(\chi) \sum_{m=0}^{D-1} \bar{\chi}(-m) y(N, m)^{-\omega} d\omega; \\ y &= N^{-1} + D^{-1} 2\pi i m. \end{aligned}$$

Der Grenzübergang $N \rightarrow \infty$ führt mit $A(\omega) = \zeta(\omega)$ und $A(\omega, \chi) = L(\omega, \chi)$ zu dem im Titel erwähnten Ausdruck. Folgendes wichtige Resultat wird daraus mit $A(\omega) = -\zeta'$ behauptet: Notwendig und hinreichend für die Nullstellenfreiheit von $\zeta(s)$ für $\sigma \geq 1 - \eta_0$ ($\eta_0 < \frac{1}{2}$) ist die Gültigkeit von

$$\sum_{p=2}^{\infty} \exp(2\pi i \lfloor \frac{m}{p} \rfloor) \exp\left(-\sqrt[3]{\frac{m}{pN}}\right) \ll N^{1-1/m-\eta_0/m-\varepsilon} \quad (m > C_0). \quad \text{Hoheisel (Köln).}$$

Davenport, H.: On the series for $L(1)$. J. London math. Soc. 24, 229—233 (1949).

Es sei $k > 1$ ganz, $\chi(n)$ ein reeller primitiver Charakter modulo k , dann ist bekanntlich $L(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n} > 0$. Der Verf. zeigt nun folgenden schönen Satz: Ist

$$S_v = \sum_{n=vk+1}^{(v+1)k} \frac{\chi(n)}{n} \quad (v \geq 0 \text{ ganz}),$$

dann ist $S_v > 0$ für alle v und k , wenn $\chi(-1) = 1$. Ist aber $\chi(-1) = -1$, dann ist $S_0 > 0$ für alle k , und es gibt einen Index $v(k)$, so daß für alle $v > v(k)$, $S_v > 0$ ist. Es gibt aber zu jedem ganzen $v \geq 1$ ein k , so daß $S_v < 0$ für $v = 1, \dots, k$. Der Beweis ist elegant. Benötigt wird nur der Wert von $L(1)$ und der Gaußschen Summen. Der Grundgedanke ist der, daß

$$S_v = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{k-1} \chi(n) f(n/k)$$

ist, wo $f(x) = (v+x)^{-1}$ für $0 < x < 1$ in eine Fouriersche Reihe mit der Periode 1 entwickelt ist.

Hlawka (Wien).

Mordell, L. J.: The minimum of a definite ternary quadratic form. J. London math. Soc. 23, 175—178 (1949).

Einfacher Beweis des bekannten Satzes: Ist $f(x, y, z)$ eine positiv definite, ternäre, quadratische Form mit der Determinante D , so gibt es ganze Zahlen $x, y, z \neq 0, 0, 0$, so daß $f(x, y, z) \leq \sqrt[3]{2D}$. Das Gleichheitszeichen gilt nur für Formen, die mit $\sqrt[3]{2D} \cdot (x^2 + y^2 + z^2 + yz + zx + xy)$ äquivalent sind.

Hofreiter (Wien).

Davenport, H.: Note on indefinite ternary quadratic forms. J. London math. Soc. **23**, 199—202 (1949).

Es sei $f(x, y, z)$ eine indefinite ternäre quadratische Form mit negativer Determinante D und $L|D|^{\frac{1}{3}}$ die untere Grenze der positiven Werte von $f(x, y, z)$ für ganze Zahlen x, y, z . Dann ist die untere Grenze von $|f(x + x_0, y + y_0, z + z_0)|$ für ganze Zahlen x, y, z und beliebige reelle Zahlen x_0, y_0, z_0 höchstens $(2L^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}L^{\frac{2}{3}})|D|^{\frac{1}{3}}$. Einfacher zahlentheoretischer Beweis. *Hofreiter (Wien).*

Sawyer, D. B.: The product of two non-homogeneous linear forms. J. London math. Soc. **23**, 250—251 (1949).

Einfacher zahlengeometrischer Beweis des bekannten Satzes: Es gibt ganze Zahlen x, y , so daß $(ax + by + p)(cx + dy + q) \leq \frac{1}{4}|ad - bc|$ (a, b, c, d, p, q reell). *Hofreiter (Wien).*

Davis, C. S.: Note on a conjecture by Minkowski. J. London math. Soc. **23**, 172—175 (1949).

Es seien ξ, η Linearformen in x und y mit der Determinante Δ . Gesucht ist der größte Wert von $\min(|\xi|^p + |\eta|^p)$ für $p \geq 1$ (bisher nur für $p = 1, 2, 4$ und ∞ bekannt). Verf. zeigt, daß die von Minkowski ausgesprochene Vermutung

$$\Delta_0 < \Delta_1 \text{ für } 1 < p < 2, \quad \Delta_1 < \Delta_0 \text{ für } p > 2$$

mit $\Delta_0 = (1 - 2^{-p})^{1/p}$, $\Delta_1 = 2^{p+1}$ nicht richtig ist. *Hofreiter (Wien).*

Chalk, J. H. H. and C. A. Rogers: The critical determinant of a convex cylinder. J. London math. Soc. **23**, 178—187 (1949).

Es sei K ein 2-dimensionaler Sternbereich, gegeben durch $F(x, y) \leq 1$, und C ein 3-dimensionaler zylindrischer Sternbereich, gegeben durch $F(x, y) \leq 1$, $|z| \leq 1$. $\Delta(C)$ bzw. $\Delta(K)$ seien die Determinanten der kritischen Gitter. Ist K konvex, so ist $\Delta(C) = \Delta(K)$. Daraus folgt, daß die Dichte der dichtesten gitterförmigen Lagerung eines konvexen Zylinders dieselbe ist wie die Dichte der dichtesten 2-dimensionalen gitterförmigen Lagerung der Zylinderschnitte. *Hofreiter (Wien).*

Yeh, Yonchien: Lattice points in a cylinder over a convex domain. J. London math. Soc. **23**, 188—195 (1949).

Es sei D ein konvexer Bereich in der xy -Ebene mit dem Mittelpunkt O , und K sei ein Zylinder über D mit der Höhe 2. Dann ist $\Delta(K) = \Delta(D)$, wobei $\Delta(K)$ bzw. $\Delta(D)$ die Determinanten der kritischen Gitter von K bzw. D bedeuten. *Hofreiter.*

Varnavides, P.: On lattice points in a hyperbolic cylinder. J. London math. Soc. **23**, 195—199 (1949).

Es sei K der 2-dimensionale Sternbereich, gegeben durch: $|xy| \leq 1$, ferner C der 3-dimensionale Sternkörper, gegeben durch: $|xy| \leq 1$, $|z| \leq 1$. Dann ist $\Delta(K) = \Delta(C) = \sqrt[3]{5}$, wobei $\Delta(K)$ bzw. $\Delta(C)$ die Determinanten der kritischen Gitter von K bzw. C sind. *Hofreiter (Wien).*

Ledermann, Walter and Kurt Mahler: On lattice points in a convex decagon. Acta math., Uppsala **81**, 319—351 (1949).

Es sei K ein konvexer Bereich und $V(K)$ sein Flächeninhalt. Ein Gitter heißt K -zulässig, wenn O der einzige Gitterpunkt innerhalb K ist. Unter allen zulässigen Gittern heißen jene kritisch, die die kleinste Determinante $\Delta(K)$ besitzen. Es sei $Q(K) = V(K)/\Delta(K)$. Speziell werde $Q(\Pi_n)$ betrachtet, wo unter Π_n die symmetrischen konvexen Polygone mit $2n$ Seiten verstanden werden. Es sei $Q_n = \min Q(\Pi_n)$. Es wird gezeigt, daß $Q_5 = 3,62 \dots$ ist und für ein nicht reguläres Zehneck angenommen wird. Ferner wird auch $Q(D)$ für die Zehneck D dünnster dichtester Lagerung berechnet. *Hofreiter (Wien).*

Jarník, Vojtěch: On the main theorem of the Minkowski geometry of numbers. Časopis Mat. Fysiky, Praha **73**, 1—8 u. tschechische Zusammenfassg. 8 (1948).

K sei eine zum Nullpunkt symmetrische konvexe beschränkte Fläche vom In-

halt 4, von stetig gekrümmter Berandung mit einem Mindestkrümmungsradius ϱ . τ_1 und τ_2 seien die kleinsten Zahlen derart, daß $\tau_i K$ außer dem Nullpunkt noch einen bzw. noch zwei linear unabhängige Gitterpunkte enthält. Dann ist:

$$\tau_1 \tau_2 \leq \left[1 + \left(1 - \frac{\tau_1}{\tau_2} \right) \delta \varrho^2 + \frac{\tau_1}{\tau_2} \varepsilon \varrho^2 \right] : [(1 + \delta \varrho^2) (1 + \varepsilon \varrho^2)],$$

wo $\delta = \frac{1}{2} \sqrt{3} - \frac{\pi}{4}$ und $\varepsilon = 1 - \frac{\pi}{4}$. Es stellt dies eine Verschärfung einer Abschätzung von v. d. Corput und Davenport [Proc. Akad. Wet, Amsterdam 49, 701—707 (1946); Indag. math. 7, 409—415 (1946)] dar, die sich nur auf τ_1 bezog und mit der neuen für $\tau_1 = \tau_2$ übereinstimmt. *Ott-Heinrich Keller* (Dresden).

Hlawka, Edmund: Über eine Verallgemeinerung des Satzes von Mordell. Ann. Math., Princeton, II. S. 50, 314—317 (1949).

Mordell [J. London Math. Soc. 12, 34—36 (1937); dies. Zbl. 15, 390] fragte in Umkehrung des Minkowskischen Linearformensatzes: Gibt es eine Zahl k_n derart, daß jedes unimodulare System von linearen homogenen Ungleichungen $|\sum_i a_{ik} x_i| \leq \lambda_i$

für mindestens ein System von Größen λ_i mit $\prod \lambda_i = k_n$ in ganzen, nicht sämtlich verschwindenden Zahlen unlösbar wird? Er zeigte $k_2 > \frac{1}{2}$, Davenport zeigte $k_n \geq (1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdots (n-1)^{n-1} \cdot n!)^{-1}$ [Acta arith., Warszawa 2, 262—265 (1937)]. Geometrisch: Es gibt eine Zahl k_n so, daß jedes zum Nullpunkt symmetrische Parallelepipèd durch affine Ausdehnung in seinen Kantenrichtungen auf einen Inhalt k_n aufgebläht werden kann, ohne daß es dabei auf einen Gitterpunkt trifft. Verf. verallgemeinert diese Fragestellung auf beliebige konvexe Körper und zeigt: Es sei $f(x)$ die Distanzfunktion eines konvexen Körpers und A eine Matrix mit $|A| = 1$. Dann gibt es eine unimodulare, ganzzahlige Matrix U , die von A nicht abhängt, und eine Diagonalmatrix D , so daß, wenn $T = UDU^{-1}$ gesetzt wird, der Körper $f(TAx) \leq t$ keine Gitterpunkte enthält, wenn sein Volumen $V < 2^n (n!)^{-4n^2-n-1}$ ist. Geometrisch besagt dies: Jeder konvexe Körper hat „Hauptachsen“ im folgenden Sinn: In jedem Gitter kann man ihn durch geeignete affine Ausdehnungen in den Hauptachsenrichtungen bis zu einem Inhalt k_n aufblähen, ohne daß er dabei einen Gitterpunkt in oder an sich aufnimmt. *Ott-Heinrich Keller* (Dresden).

Jarník, Vojtěch: On Estermann's proof of a theorem of Minkowski. Časopis Mat. Fysiky, Praha 73, 131—140 u. tschechische Zusammenfassung. 140 (1949).

Bezeichne: $\mathfrak{B}(S)$ den Vektorkörper des konvexen Körper S , $\tau_i(S)$ die untere Grenze der Zahlen α , für die αS wenigstens i unabhängige Gitterpunkte enthält. Minkowski hat die Ungleichung (1) $\tau_1 \cdots \tau_n V(S) \leq 1$ [$\tau_i = \tau_i(\mathfrak{B}(S))$] für zentralsymmetrische S bewiesen und die Grenzfälle bestimmt. Eine neue Beweismethode wurde von Estermann gegeben [J. London math. Soc. 22, 179—182 (1947)]. Verf. wendet Estermanns Methode an, beweist (1) und bestimmt die Körper S , für die in (1) das Gleichheitszeichen gilt. Die Arbeit ist leicht lesbar und vermeidet Hinweise auf frühere Abhandlungen. *Fáry* (Paris).

Rogers, C. A.: The successive minima of measurable sets. Proc. London math. Soc., II. S. 51, 440—449 (1949).

$D(S)$ ist die Menge der Punkte $OR = PQ$, $P, Q \in S$ (O ist das Origo), $V(S)$ das Lebesguesche Maß von S ; bezeichne ν_k die untere Grenze der Zahlen ν , für die $D(\nu S)$ k linear unabhängige Gitterpunkte enthält, μ_k die obere Grenze der Zahlen μ , für die $D(\mu S)$ höchstens $k-1$ linear unabhängige Gitterpunkte enthält. Satz 2: $\nu_1 \cdots \nu_n V(S) \leq 2^{(n-1)/2}$, wenn $V(S) > 0$. Satz 3: $\nu_1 \cdots \nu_n \frac{\mu_k}{\nu_k} V(S) \leq 2^{n-1} (1 \leq k \leq n)$ und $(\nu_1 \cdots \nu_n)^{1-1/n} (\mu_1 \cdots \mu_n)^{1/n} V(S) \leq 2^{n-1}$. Das wichtigste Hilfsmittel der Beweise ist die Ungleichung $\varrho_1 \cdots \varrho_n V(S) \leq 1$, wo $\varrho_k \leq \nu_k$ und ϱ_{k+1}/ϱ_k ganz ist. Verf. erhielt diese Resultate 1946; sie sind Verschärfungen von Ungleichungen von Jarník. (Diese Untersuchungen sind weitergeführt in den Arbeiten: Rogers, dies. Zbl.

33, 106, Chabauty, C. r. Acad. Sci., Paris 227, 747—749 (1948), 228, 796—797 (1949); Jarník, s. vorsteh. Referat.) *Fáry* (Paris).

Jarník, Vojtěch: On the successive minima of arbitrary sets. Časopis Mat. Fysiky, Praha 73, 9—15 und tschechische Zusammenfassg. 15 (1948).

Definitionen: $L(M)$ ist das Lebesguesche Maß von M ; $\mathfrak{B}(M)$ ist die Menge $\frac{1}{2}(x - y)$, $x, y \in M$; $\mathfrak{B}^0(M) = M$, $\mathfrak{B}^p(M) = \mathfrak{B}(\mathfrak{B}^{p-1}(M))$ ($p \geq 1$); $\lambda_i(M')$ sei die untere Grenze der Zahlen $\alpha > 0$, für die $\cup \beta M'$ ($0 < \beta \leq \alpha$) wenigstens i unabhängige Gitterpunkte enthält; $v_i(M')$ bezeichne die untere Grenze der Zahlen α , für die jede Menge $\beta M'$, $\beta > \alpha$, wenigstens i unabhängige Gitterpunkte enthält. Bekannt sind Abschätzungen, wie $\lambda_1 \cdots \lambda_n L(M) \leq 2^{2n-1}$, $\lambda_i = \lambda_i(\mathfrak{B}(M))$. Verf. zeigt hier, daß Produkte dieser Art nicht immer beschränkt sind, es gilt z. B. der folgende Satz 3. Es gibt Mengen M , so daß

$$\lambda_1 \cdots \lambda_n \frac{v_i}{\lambda_i} \frac{v_j}{\lambda_j} L(M) \quad [1 \leq i < j \leq n, \quad p \geq 0; \quad \lambda_k = \lambda_k(\mathfrak{B}^p(M))]$$

beliebig groß ist. (Vergleiche die vorsteh. besprochene Arbeit von Rogers.) *Fáry*.

Whithworth, J. V.: On the densest packing of sections of a cube. Ann. Mat. pura appl., Bologna, IV. S. 27, 29—37 (1948).

Verf. fragt nach der dichtesten gitterförmigen Lagerung von Körpern, die mit dem Körper $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$, $|z| \leq 1$, $|x + y + z| \leq t$ kongruent sind, wobei $0 < t < 3$. Ist dabei $\Delta(t)$ die Gitterdeterminante, $q(t)$ das Verhältnis des erfüllten Raumes zum Gesamtraum, so wird

für:	$\Delta(t)$	$q(t)$
$0 < t \leq 1/2$	$3t/4$	$1 - t^2/9$
$1/2 \leq t \leq 1$	$-(t^3 + 3t^2 - 24t + 1)/27$	$9t(9 - t^2)/4(-t^3 - 3t^2 + 24t - 1)$
$1 \leq t < 3$	$t(t^2 - 9t + 27)/27$	$9(t^2 - 9t + 27t - 3)/8t(t^2 - 9t + 27)$

Verf. gibt noch die Koordinaten der Gitterpunkte an. *Ott-Heinrich Keller*.

Prasad, A. V.: Note on a theorem of Hurwitz. J. London math. Soc. 23, 169—171 (1949).

Problem: Es sollen die bestmöglichen Konstanten C_m gefunden werden, so daß $|\xi - \frac{p}{q}| < \frac{1}{C_m q^2}$ für jede reelle irrationale Zahl ξ mindestens m Lösungen in ganzen

Zahlen $p, q > 0$, $(p, q) = 1$, hat. Antwort: $C_m = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} + \frac{P_{2m-1}}{Q_{2m-1}}$, wobei $\frac{P_n}{Q_n}$ der

n -te Näherungsbruch von $\xi_0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ ist. ($P_1/Q_1 = 1$.) Beweis mit Kettenbrüchen und diophantischen Approximationen.

Hofreiter (Wien).

Schmidt, Hermann: Zur Kettenbruchtheorie der zweiseitigen Zahlklassen. Arch. Math., Karlsruhe 1, 333—339 (1949).

Hängt eine reelle quadratische Irrationalzahl mit ihrer konjugierten mittels einer lineargebrochenen ganzzahligen unimodularen Substitution zusammen, so heißt sie zweiseitig. Die primitive Periode der regelmäßigen Kettenbruchentwicklung einer solchen ist entweder symmetrisch oder besteht aus zwei in sich symmetrischen Abschnitten; ihre Länge sei k . Eine Klasse zweiseitiger Zahlen heißt 1. Art, wenn es in ihr eine Zahl mit ganzzahliger Spur, 2. Art, wenn es in ihr eine Zahl mit der Norm -1 gibt. Andere gibt es nicht. Verf. fragt nach den Klassen, die zu einer bestimmten Diskriminante d gehören und zeigt: 1. Enthält d einen Primteiler der Form $4n + 3$ oder ist d ein Vielfaches von 16, so ist k gerade, es gibt keine zweiseitigen Klassen 2. Art, es gibt 2^{s-2} verschiedene Klassen 1. Art, wenn $d \equiv 12 \pmod{16}$ oder $d \equiv 0 \pmod{32}$, sogar 2^{s-1} . Dabei bedeutet s die Anzahl der verschiedenen in d bzw. in $d/4$ aufgehenden Primzahlen, je nachdem d ungerade oder gerade ist. 2. Gilt für d keine der obigen Aussagen und ist k gerade, so gibt es 2^{s-2} Klassen,

die lediglich der 1. Art, und ebenso viele, die lediglich der zweiten Art sind. Ist k ungerade, so gibt es 2^{k-1} zweiseitige Klassen, und diese sind gleichzeitig 1. und 2. Art. Verf. gibt noch mit elementaren zahlentheoretischen Methoden ein Verfahren an, diese Zahlklassen aufzustellen.

Ott-Heinrich Keller (Dresden).

Bunickij, Eugen: Etude des fractions continues suivant un module entier $m > 1$. Časopis Mat. Fysiky, Praha **73**, 109—119 und tschechische Zusammenfassung. 119 (1949).

Die Teilzähler eines abbrechenden Kettenbruchs seien 1, die Teilnenner ganze Zahlen eines Restklassenrings nach einer natürlichen Zahl m . Verf. nennt ein Zahlenpaar dieses Restklassenrings zulässig, wenn es als Zähler und Nenner eines Näherungsbruches vorkommt. Alle Zahlenpaare (r, ϱ) , für die $(r, \varrho, m) = 1$, und nur diese sind zulässig. Zulässige Zahlenpaare kommen sowohl an gerader wie an ungerader Stelle vor. Verf. gibt Abzählungen derjenigen Kettenbrüche, die ein gegebenes Zahlenpaar an gegebener Stelle enthalten. Soll es Kettenbrüche geben, die ein gegebenes Zahlenpaar an letzter Stelle enthalten, so muß ihnen eine Mindestlänge gestattet sein. Gesamtheiten solcher Kettenbrüche nennt Verf. vollständig.

Ott-Heinrich Keller (Dresden).

Analysis.

Differentiation und Integration reeller Funktionen:

Nikodým, Otton Martin: Sur les fonctionnelles linéaires. Pseudotopologie. C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 16—18 (1949).

1 désignant un ensemble non vide d'éléments quelconques, une pseudo-topologie (en abrégé p. t.) sur 1 est une classe de sous-ensembles de 1 contenant 1 et l'ensemble vide \emptyset et telle que si $a \in G$ et $b \in G$, $a \cdot b \in G$ et si $a_i \in G$ pour $i = 1, 2, \dots$, $\bigcup a_i \in G$. Les ensembles de G sont appelés ensembles pseudo-ouverts, leurs complémentaires ensembles pseudo-fermés. Une fonction $f(s)$ aux valeurs réelles définie pour tous les $s \in 1$ est dite pseudo semi-continue supérieurement (inférieurement) lorsque pour tout λ réel l'ensemble lebesguien $[f < \lambda]$ ($[f > \lambda]$) est pseudo-ouvert. Les théorèmes classiques sur les fonctions continues et semi-continues ne faisant intervenir que des combinaisons dénombrables des ensembles de Lebesgue sont valables dans une p. t. Un ensemble pseudo-ouvert a est dit actif s'il existe un ensemble ouvert α de nombres réels et une fonction pseudo-continue f sur 1 tels que $f^{-1}(\alpha) = a$. Deux caractérisations des ensembles actifs a sont données: 1) Il existe une fonction pseudo-continue $x(s)$ positive sur a et nulle sur le complément. 2) La fonction caractéristique de a est limite d'une suite non décroissante de fonctions pseudo-continues. Les ensembles actifs de G constituent une p. t. G^* dite p. t. réduite de G . Deux p. t. G_1 et G_2 ont les mêmes p. t. réduites lorsque leurs familles de fonctions pseudo-continues sont identiques. Remarques du Réf. — Les ensembles a, b, \dots peuvent être remplacés par les somas d'une σ -algèbre Booléenne ayant une unité 1, la notion de „fonction“ étant entendue au sens de Wecken [Math. Z. **45**, 377—404 (1939); ce Zbl. **21**, 224]. Dans le cas d'une topologie séparée T suivant Bourbaki, la complète régularité de T peut se traduire par la propriété pour T d'admettre une base d'ensembles ouverts actifs. La topologie réduite T serait la topologie complètement régulière la plus fine parmi celles qui sont moins fines que T . Chr. Pauc.

Stone, M. H.: Notes on integration. II. Proc. nat. Acad. Sci. USA **34**, 447—455 (1948).

In Fortsetzung der 1. Note (betr. Bezeichnungen vgl. dies. Zbl. **31**, 14) wird das System der „meßbaren“ Funktionen (unter Umgehung der Bezugnahme auf ein Maß) so definiert: $f \in \mathfrak{M}$, wenn und nur wenn $\text{mid}(f) = \text{Min} [\text{Max}(f, h), \text{Max}(h, k), \text{Max}(k, f)] \in \mathfrak{L}$ für alle $h, k \in \mathfrak{L}$. Es ist \mathfrak{M} ein σ, δ -Vektorverband, ins-

besondere ist also der (algebraische) Limes einer Folge meßbarer Funktionen selbst meßbar. Es ist $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{M}$. Ferner folgt $f \in \mathfrak{L}$ aus $f \in \mathfrak{M}$, wenn und nur wenn entweder $N(f) < +\infty$ oder $g, h \in \mathfrak{L}$ existieren mit $g \leq f \leq h$. Zu jedem $f \in \mathfrak{G}$ existiert $g \in \mathfrak{L}$ mit $|f| \leq g$ und $N(f) = L(g)$; ist speziell $1 \in \mathfrak{M}$ und ist f charakteristische Funktion $c(Y)$ einer Menge Y , so kann auch g als charakteristische Funktion gewählt werden. — Es ist $N(c(Y)) = \mu^*(Y)$ eine Maßfunktion (im Sinne von Carathéodory); der σ -Körper \mathfrak{z}^* der „ μ -meßbaren“ Mengen \mathfrak{Z} ist dann bekanntlich gekennzeichnet durch $\mu^*(Y) = \mu^*(YZ) + \mu^*(Y-Z)$ für alle $Y \subset \mathfrak{X}$. Bezeichnet man hingegen mit \mathfrak{z} den σ -Körper aller „meßbaren“ Mengen, d. h. aller Mengen mit meßbarer charakteristischer Funktion, so gilt $\mathfrak{z} \subset \mathfrak{z}^*$; insbesondere $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}^*$, wenn und nur wenn $1 \in \mathfrak{M}$ (d. h. $\mathfrak{X} \in \mathfrak{z}$). — Es sei $1 \in \mathfrak{M}$. Ist $|f| < +\infty$, so gilt $f \in \mathfrak{M}$, wenn und nur wenn die Urbildmengen $[\alpha \leq f(x) < \beta] \in \mathfrak{z}$ für alle α, β . Ist $1 \in \mathfrak{M}$ und ist \mathfrak{X} Vereinigung abzählbar vieler meßbarer Mengen \mathfrak{X}_ρ mit $\mu^*(\mathfrak{X}_\rho) < +\infty$, $\mu^*(\mathfrak{X}) = \sum \mu^*(\mathfrak{X}_\rho)$, ist schließlich $f \in \mathfrak{L}$, so gilt $L(f) = \int f d\mu^*$,

wo rechts das Integral von f bezüglich des Maßes $\mu^*|_{\mathfrak{z}}$ steht. — Daneben enthält die Note eine Untersuchung der Systeme \mathfrak{G}_p bzw. \mathfrak{L}_p der Funktionen $f \in \mathfrak{M}$ mit $|f|^{p-1} \in \mathfrak{G}$ bzw. $\in \mathfrak{L}$; $p \geq 1$ beliebig, aber fest. $N_p(f) = \{N(|f|^p)\}^{1/p}$ hat die Eigenschaften einer Norm für \mathfrak{G}_p , wobei \mathfrak{G}_p vollständiger normierter Vektorraum; ferner ist dann \mathfrak{L}_p abgeschlossener (linearer) Unterraum von \mathfrak{G}_p . Die vom gleichen E/\mathfrak{G} induzierten \mathfrak{G}_p bzw. \mathfrak{L}_p sind für alle p homöomorph und von gleicher Lineardimension. Hingegen sind die von verschiedenen E/\mathfrak{G} induzierten \mathfrak{L}_p homöomorph, wenn und nur wenn sie gleiche Lineardimension besitzen. *Haupt* (Erlangen).

Stone, M. H.: Notes on integration. III. Proc. nat. Acad. Sci. USA 34, 483—490 (1948).

In Weiterführung zweier früherer Noten (vgl. dies. Zbl. 31, 14 und vorsteh. Referat) werden lineare positive Funktionale in Produkträumen betrachtet, also Verallgemeinerungen des Fubinischen Satzes. Zur Abkürzung sollen die auf \mathfrak{X} als Definitionsbereich bezogenen Funktionenmengen z. B. \mathfrak{G} , sowie zugehörige Funktionale, z. B. E , L usw. mit \mathfrak{G}_x , E_x , L_x usw. bezeichnet werden. Es sei jetzt $\mathfrak{Z} = \mathfrak{X} \times \mathfrak{Y}$ die Menge aller $z = (x, y)$ mit $x \in \mathfrak{X}$, $y \in \mathfrak{Y}$. Sind dann E_x , E_y „elementare Integrale“ über \mathfrak{G}_x , \mathfrak{G}_y , so sei $\mathfrak{G}_x * \mathfrak{G}_y$ die Menge aller $f(z) = f(x, y)$ mit $f(x, y) \in \mathfrak{G}_y$ bei beliebigem, aber festem $x \in \mathfrak{X}$ und mit $E_y(f(x, y)) \in \mathfrak{G}_x$. Ferner sei

$$E_x * E_y(f(z)) = E_x(E_y(f(x, y)))$$

gesetzt; $E_x * E_y$ besitzt die eingangs der 1. Note geforderten Eigenschaften (1) und (2) jedenfalls dann, wenn $|f| \in \mathfrak{G}_x * \mathfrak{G}_y$ für $f \in \mathfrak{G}_x * \mathfrak{G}_y$. Demgemäß sei \mathfrak{G}_z ein lineares Teilsystem von $\mathfrak{G}_x * \mathfrak{G}_y$, so, daß $|f| \in \mathfrak{G}_z$, wenn $f \in \mathfrak{G}_z$; ferner sei E_z die Verengung von $E_x * E_y$ auf \mathfrak{G}_z , wobei jetzt E_z die Eigenschaften (1) und (2) besitzt. Entsprechend werden $\mathfrak{L}_x * \mathfrak{L}_y$ bzw. $L_x * L_y$ erklärt, wobei es jetzt sowohl für $f(x, y) \in \mathfrak{L}_y$, wenn $x \in \mathfrak{G}_x$ fest, als für $L_y(f(x, y)) \in \mathfrak{L}_x$ auf Nullmengen nicht ankommt.

— Nun wird gezeigt: Gilt für die drei elementaren Integrale E_x , E_y , E_z die Relation $E_z \subset E_x * E_y$, so gilt für die zugehörigen Erweiterungen L_x , L_y , L_z die Relation $L_z \subset L_x * L_y$; ferner folgt aus $f \in \mathfrak{M}_z$, aus der Existenz von $f_n \in \mathfrak{G}_z$ mit $|f| \leq \sum |f_n|$ und aus $|f| \in \mathfrak{L}_x * \mathfrak{L}_y$, daß $f \in \mathfrak{L}_z$. Anwendung auf topologische, lokal kompakte Gruppen [vgl. A. Weil, L'intégration usw., Paris 1938, S. 30—45]. Anschließend wird die von Jessen [Acta math. Uppsala 63, 249—323 (1934); dies. Zbl. 10, 200] herrührende Verallgemeinerung des Fubinischen Satzes für den Fall der Integralbildung bei unendlich vielen Faktoren behandelt. Es sei $\mathfrak{X}(\lambda)$ eine nicht leere Menge, wobei $\lambda \in \mathcal{A}$ und \mathcal{A} unendlich, ferner sei $\mathfrak{X}_\mathcal{A}$ Produkt aller $\mathfrak{X}(\lambda)$ mit $\lambda \in \mathcal{A} \subset \mathcal{A}$, außerdem sei für jedes nicht leere, endliche $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ ein elementares Integral $E_{\mathfrak{X}_\mathcal{B}}$ definiert für ein System elementarer Funktionen $\mathfrak{G}(\mathfrak{X}_\mathcal{B})$ mit $\mathfrak{X}_\mathcal{B}$ als Definitionsbereich derart, daß folgende Bedingungen erfüllt sind: (1') $1 \in \mathfrak{G}(\mathfrak{X}_\mathcal{B})$

und $E_{x_B}(1) = 1$; (2') Aus $B = \Gamma \vee A$, $\Gamma \wedge A = \emptyset$, $g \in \mathfrak{E}(\mathfrak{X}_\Gamma)$ folgt $f \in \mathfrak{E}(\mathfrak{X}_B)$, wenn $f(x_B) = f(x_\Gamma, x_A) = g(x_\Gamma)$, ferner ist $E_{x_B} \subset E_{x_\Gamma} * E_{x_A}$. Ist nun $A \subset \mathcal{A}$ beliebig, so sei $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}_A)$ das System aller $f|_{\mathfrak{X}_A}$ so, daß für (mindestens) einen endlichen Teil B von A und für $\Gamma = A - B$ ein $g(x_B) \in \mathfrak{E}(\mathfrak{X}_B)$ existiert mit

$$f(x_A) = f(x_B, x_\Gamma) = g(x_B);$$

für jedes $f \in \mathfrak{E}(\mathfrak{X}_A)$ setzt man $E_{x_A}(f(x_A)) = E_{x_B}g(x_B)$. Fordert man die Eigenschaft (2) (1. Note) für $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}_A)$, E_{x_A} , so gilt (2) für jedes $A \subset \mathcal{A}$ bzw. jedes $\mathfrak{E}(\mathfrak{X}_A)$, E_{x_A} .

Außerdem gelten jetzt (1'), (2') für beliebige B , nicht nur für endliche; und zu jedem $f \in \mathfrak{L}_p(\mathfrak{X}_A)$ existiert ein abzählbares $\Gamma \subset A$ sowie ein $g \in \mathfrak{L}_p(\mathfrak{X}_\Gamma)$, so daß $f(x_A) = g(x_\Gamma)$ bis auf eine Nullmenge. Ist speziell A die Menge der natürlichen Zahlen, B die Menge aller $\alpha \in A$ mit $\alpha \leq n$ und ist $\Gamma = A - B$, so existieren zu $f \in \mathfrak{L}_p(\mathfrak{X}_A)$ solche g_n , $h_n \in \mathfrak{L}_p(\mathfrak{X}_A)$, für die fast überall $g_n(x_A) = L_{x_B}(f(x_B, x_\Gamma))$, $h_n(x_A) = L_{x_\Gamma}(f(x_B, x_\Gamma))$ sowie $L_{x_A}(f) = \lim g_n$, $f = \lim h_n$, wobei die Konvergenz sich auf die Norm für $\mathfrak{L}_p(\mathfrak{X}_A)$ bezieht; es besteht aber auch fast überall algebraische Konvergenz.

Haupt (Erlangen).

Stone, M. H.: Notes on integration. IV. Proc. nat. Acad. Sci. USA 35, 50—58 (1949).

Verf. untersucht jetzt das System \mathfrak{I} der linearen positiven Funktionale $E'|\mathfrak{E}'$, $E''|\mathfrak{E}''$ usw. und ihrer Erweiterungen $L'|\mathfrak{L}'$, $L''|\mathfrak{L}''$ [es sollen also die Forderungen (1) und (2) der 1. Note erfüllt sein (dies. Zbl. 31, 14)]. Ist $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}' \wedge \mathfrak{E}''$, so gilt auch $E'|\mathfrak{E} \in \mathfrak{I}$, $E''|\mathfrak{E} \in \mathfrak{I}$. Demgemäß spaltet sich die Untersuchung in diejenige (A) der Systeme e aller E' , E'' usw. $\in \mathfrak{I}$ mit je gleichem festem Definitionsbereich \mathfrak{E} , und (B) der Systeme \mathfrak{m} , aller Erweiterungen je eines festen $E|\mathfrak{E} \in \mathfrak{I}$. — Betr. (A). Jedes System e bildet eine gerichtete additive Semigruppe mit den reellen, nicht-negativen Zahlen als Operatoren, wenn man unter αE und $E' + E''$ versteht $\alpha E(f)$ und $E'(f) + E''(f)$ für jedes $f \in \mathfrak{E}$, wenn man ferner $E' \leq E''$ setzt, falls $E'(f) \leq E''(f)$ für alle $f \in \mathfrak{E}$ mit $f \geq 0$; da $E' \leq E$ und $E'' \leq E$ für $E = E' + E''$, ist e sogar gerichtet. Weiter sei $E' \prec E''$, wenn jede E'' -Nullfunktion auch E' -Nullfunktion ist, und $E' \sim E''$, falls $E' \prec E''$ und $E'' \prec E'$. Es ist \prec eine teilweise Ordnung in e mit \sim als zugehöriger Äquivalenz, wobei e sogar ein Boolescher σ -Verband ist, wenn die σ -Eigenschaft sich nur auf beschränkte Folgen bezieht. Im wesentlichen unter den beim Beweise für die Integraldarstellung von $L(f)$ gemachten Vor. (vgl. Note 2, dies. Zbl. 34, 29) [daß nämlich $1 \in \mathfrak{M}$ und daß $\mathfrak{X} \in \mathfrak{z}$ mit $\mathfrak{X} = \sum \mathfrak{X}_\alpha$, $\mathfrak{X}_\alpha \in \mathfrak{z}$, $\mu^*(\mathfrak{X}_\alpha) < +\infty$, $\mu^*(\mathfrak{X}) = \sum \mu^*(\mathfrak{X}_\alpha)$] werden jetzt die aus der Integralrechnung bekannten Sätze (I), Zerlegungssatz von Lebesgue, und (II), Darstellungssatz von Radon-Nikodym bewiesen. Zu (II): Ist $E' \prec E''$, so existiert im wesentlichen ein einziges $\chi \in \mathfrak{M}''$ mit $\chi \geq 0$ derart, daß $f \in \mathfrak{L}''$, wenn und nur wenn $\chi f \in \mathfrak{L}''$, und daß $L'(f) = L''(\chi f)$; umgekehrt: Ist E'' gegeben und $\chi \in \mathfrak{M}''$ mit $\chi \geq 0$ derart, daß aus $f \in \mathfrak{E}$ folgt $\chi f \in \mathfrak{E}''$, dann gilt $E' \prec E''$ für $E' = L''(\chi f)$. — Zu (I): Zu beliebigen E' , E'' existiert eindeutig eine Zerlegung $E' = E'_1 + E'_2$ mit $E'_1 \prec E''$ und mit $(E'_2 \cap E'')(|f|) = 0$ für alle $f \in \mathfrak{E}$. — Betr. B. Neben einigen allgemeinen Bemerkungen über Erweiterungen findet sich vor allem eine Diskussion des Bourbakiintegrals $L|\mathfrak{L}$ als Erweiterung des Stoneschen $L|\mathfrak{L}$ (sofern die Bourbaische Erweiterung existiert). Beim Übergang von L zu L wird die Vor. (2) der 1. Note ersetzt durch (2): Ist \mathfrak{P} irgendein (steigend) gerichtetes System von nicht negativen Funktionen p aus \mathfrak{E} (wird also die „Richtung“ erklärt vermitteltst $p_1 \leq p_2$) und ist $f \in \mathfrak{E}$ so beschaffen, daß $|f| \leq \sup(p; p \in \mathfrak{P})$, so gilt auch $E(|f|) \leq \sup(E(p); p \in \mathfrak{P})$. Es fordert also (2) weniger als (2). Definiert man nun die Norm $\bar{N}(f)$ mit Benutzung von (2) statt von (2), so kann mit Hilfe von \bar{N} der weitere Aufbau wörtlich so voll-

zogen werden wie früher mit N und führt dann zu $\bar{L} \mathfrak{Q}$ [vgl. auch McShane, dies. Zbl. 32, 150]. Es gilt $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{Q}$, und zwar ist $\bar{f} \in \mathfrak{Q}$, wenn und nur wenn $\bar{f} = f + g$ mit $f \in \mathfrak{Q}$ und $N(g) = 0$; dabei ist dann $\bar{L}(\bar{f}) = L(f)$. Es wird also — grob gesprochen — \bar{L} aus \mathfrak{Q} gewonnen durch Addition aller \bar{L} -Nullfunktionen, wobei der Integralwert unverändert bleibt.

Haupt (Erlangen).

Viola, T.: Sui fondamenti geometrici del teorema del cambiamento di variabili negli integrali a più dimensioni. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. 3, 277—282 (1947).

Um die Behandlung der Substitution mehrfacher Integrale zu ermöglichen, wird folgender Hilfssatz bewiesen: Haben die Funktionen $f_k(u_1, u_2, \dots, u_n)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) in einem achsenparallelen Parallelotop des n -dimensionalen u -Raumes stetige partielle Ableitungen erster Ordnung und nichtverschwindende Funktionaldeterminante, so wird durch die Transformation $x_k = f_k$ eine genügend feine Simplexzerlegung des Parallelotopes, wobei jedes Simplex n achsenparallele Kanten hat, in eine lokal schlichte Simplexmenge des x -Raumes übertragen. G. Hajós.

Geronimus, Ja. L.: Über einige Quadraturformeln. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 65, 437—440 (1949) [Russisch].

Verf. betrachtet im Anschluß an Untersuchungen von S. Bernstein die Quadraturformel

$$\int_a^b f(x) d\sigma(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^{(n)} f(y_i^{(n)}),$$

worin die Abszissen $y_i^{(n)}$ alle reell, voneinander verschieden und im Integrationsintervall gelegen sind. M_n sei der Genauigkeitsgrad der Formel, d. h. der Maximalgrad des Polynoms, für das sie richtig bleibt. Unter gewissen Voraussetzungen über die Belegungsfunktion $d\sigma(x)$ gilt dann $\lim_{n \rightarrow \infty} (M_n \lambda_i^{(n)}) = 0$. Ein zweiter Satz betrifft

Wachstumseigenschaften der Funktion $\sigma(x)$.

W. Hahn (Berlin).

Bunickij, Eugen: Sur une formule du calcul intégral. Časopis Mat. Fysiky, Praha 72, 129—130 und tschechische Zusammenfassg. 130 (1947).

Ein Beweis des wohlbekannten Satzes, daß bei stetigem $\varphi(x)$ und

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} \varphi(t) dt$$

$f^{(n)}(x) = \varphi(x)$ gilt, der auf der Entwicklung von $(x-t)^{n-1}$ nach dem binomischen Satze beruht.

Császár (Budapest).

Malliavin, Paul: Majorantes et minorantes des fonctions simplement totales. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 286—287 (1949).

Verf. nennt die Funktion $H(x)$ einfache, schwache Majorante der in $[a, b]$ endlichen Funktion $f(x)$, wenn 1. $H(a) = 0$; 2. wenn es zu jeder perfekten Menge $P \subset [a, b]$ ein Intervall I gibt, so daß $PI \neq 0$ und die untere, rechtsseitige Derivierte von $H(x)$ bezüglich P in jedem Punkte von PI größer als $-\infty$ ist; 3. fast überall in $[a, b]$ die approximative Ableitung von $H(x)$ (deren Existenz aus 2. folgt) größer oder gleich $f(x)$ ist. — Die Funktion $M(x)$ wird einfache, starke Majorante von $f(x)$ genannt, wenn 1. $M(a) = 0$; 2. $M(x)$ stetig ist; 3. wenn es zu jeder perfekten Menge $P \subset [a, b]$ ein Intervall I gibt, so daß $PI \neq 0$ und die untere, rechtsseitige Derivierte von $M(x)$ bezüglich P in jedem Punkte von PI größer oder gleich $f(x)$ ist. — Eine einfache, starke Majorante ist zugleich eine einfache, schwache Majorante. Ähnlich werden Minoranten definiert. — Benutzt man in der Perronschen Integraldefinition als Majoranten bzw. Minoranten die einfachen, schwachen Majoranten bzw. Minoranten (oder die einfachen, starken Majoranten bzw. Minoranten), so gelangt man zum allgemeinen Denjoyschen Integral. — Skizzen von Beweisen.

Császár (Budapest).

Ascoli, Guido: L'isotropia analitica e le sue applicazioni. Rend. Sem. mat. Torino 8, 109—122 (1949).

L'A. appelle un „système linéaire isotrope“ (s. l. i.) une famille (S) de fonctions continues $f(\varrho, \vartheta)$ (ϱ, ϑ coordonnées polaires dans le plan) définies dans une couronne $0 \leq \varrho_1 \leq \varrho \leq \varrho_2 \leq +\infty$, satisfaisant aux conditions suivantes: a) si $f_1 \in (S)$ et $f_2 \in (S)$, alors $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in (S)$; b) si $f(\varrho, \vartheta) \in (S)$ alors $f(\varrho, \vartheta + \alpha) \in (S)$ pour tout α réel; c) si $f \in (S)$ et si $\varphi(\alpha)$ est une fonction continue, périodique en 2π , alors $\oint f(\varrho, \vartheta + \alpha) \varphi(\alpha) d\alpha \in (S)$. La famille des fonctions harmoniques dans un cercle fournit un exemple de s. l. i. L'A. énonce quelques propriétés des s. l. i. et généralise leur définition à $n > 2$ dimensions. Un exposé détaillé de la théorie se trouve dans les travaux antérieurs de l'A. [Comment. Pontifica Acad. Sci. 7, no. 10 (1943); Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. 1, 1167—1172 (1946).] Horváth (Paris).

Mambriani, A.: Sul concetto del Tonelli di funzione, di due variabili, a variazione limitata. Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena 1, 121—130 (1947).

Mambriani, A.: Una interpretazione geometrica della variazione doppia totale. Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena 1, 131—134 (1947).

* The two notes contain several observations about functions of two variables with bounded variation. We here quote the following statement: Let $f(x, y)$ have continuous first derivations in the rectangle R [$a \leq x \leq a'$, $b \leq y \leq b'$]. Project the surface $z = f'_x(x, y)$ [(x, y) in R] on the plane (x, z) , parallel to the x -axis, and the surface $z = f'_y(x, y)$ [(x, y) in R] on the plane (y, z) , parallel to the y -axis. Then the areas of the two projections are equal to each other, and their common value is the double total variation of $f(x, y)$ in R . S. Cinqini (Pavia).

Macintyre, Sheila Scott: A functional inequality. J. London math. Soc. 23, 202—209 (1949).

Macintyre, A. J.: Note on the preceding paper. Ibidem, 209—211 (1949).

I. In gleicher Richtung wie E. M. Wright (dies. Zbl. 29, 291) beweist Verf. mittels einer Zwei-Stellen-Entwicklung und Verwendung der Gontcharoffschen Polynome [W. Gontcharoff, Sur les dérivées successives des fonctions, Ann. Sci. École norm. sup., III. S. 47, 1—78 (1930)] Sätze, wovon der folgende eine von mehreren Formen ist: Es variere x im Intervall $0 \leq x \leq a$ mit $0 < a < \pi/2$, und die Funktion $f(x)$ sei samt allen ihren Ableitungen stetig. Für das Bestehen der Ungleichung $f(x) \leq \sin x$ sind die folgenden Bedingungen hinreichend: 1. $(-1)^{(n-1)/2} f^{(n)}(0) \leq 1$ für alle ungeraden n und $f(0) \leq 0$; 2. $(-1)^{n/2} f^{(n)}(a) \geq \sin a$ für alle positiven geraden n ; 3. mit der Bezeichnung $c_n = \max_x \{0, \max \{(-1)^{(n+1)/2} f^{(n)}(x)\}\}$ ist $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log c_n)/n \leq 0$. — II. Enthält eine Modifikation eines von E. M. Wright gegebenen, nur endlich viele Ableitungen von $f(x)$ betreffenden Systems hinreichender Bedingungen für $f(x) \leq \sin x$. Aumann.

Jecklin, H.: Quasiarithmetische Mittelwerte. I, II. Elemente Math., Basel 4, 112—115, 128—133 (1949).

Elementare, graphische Betrachtungen zur Jensenschen Ungleichung für quasi-arithmetische Mittelwerte. Aumann (Würzburg).

Bononcini, Vittorio Emanuele: Interpretazione geometrica dei segni delle derivate successive di una funzione $y=f(x)$. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 267—269 (1949).

Varoli, Guiseppe: Identità numeriche. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 250—254 (1949).

Allgemeine Reihenlehre:

Vidal, R. Rodriguez: Asymptotisch fastperiodische Doppelfolgen. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 8, 239—242 (1948) [Spanisch].

Notiz über die Definitionen aus des Verf. These (Contribución al estudio de las sucesiones casiperiódicas y sus generalizaciones, Publ. del C. S. de I. C. Sem. Mat. Univ. de Barna, 1947). Eine Doppelfolge $((a_m^n))$, $n, m = 0, \pm 1, \dots$, heißt asymptotisch fastperiodisch, wenn eine Darstellung $a_m^n = p_m^n + q_m^n$ gilt mit fastperiodischem $((p_m^n))$ [d. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N(\varepsilon)$, so daß je $N(\varepsilon)$ aufeinanderfolgende ganze Zahlen zwei Zahlen s und t enthalten mit $|p_{m+t}^{n+s} - p_m^n| < \varepsilon$ für alle n, m] und mit $q_m^n \rightarrow 0$ für $n^2 + m^2 \rightarrow \infty$. Diese Darstellung ist eindeutig. Es gibt eine einfache nur auf $((a_m^n))$ bezügliche Charakterisierung der asymptotisch fastperiodischen Doppelfolgen. Auf die Beziehungen zu Fourierentwicklungen und den A.P.P.C.-Funktionen von Fréchet [Les fonctions asymptotiquement presque-périodiques, Rev. Sci. 76, No. 7/8 (1941)] wird hingewiesen. Aumann (Würzburg).

Darevsky (Darevskij), V.: On Toeplitz's methods. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 11, 3—29 und engl. Zusammenfassg. 29—32 (1947) [Russisch].

The au. considers regular reversible methods $A = (a_{ik})$ of summation, introduced by Banach [Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932; this Zbl. 5, 209]. Let A' denote the set of all A -summable sequences $x = \{x_k\}$; A''' the set of all $x \in A'$ such that $\sum t_i \sum a_{ik} x_k = \sum x_k \sum a_{ik} t_i$ for any sequence $\{t_i\} \in l^1$. Finally let $\xi_k^{(m)} = \{\xi_k^{(m)}\}$, $m = 1, 2, \dots$, be the sequence transformed by A into the sequence $y_i = 0$ for $i \neq m$, $y_m = 1$. — The results are: (1) There is a characterization [for normal methods due to Mazur, Studia Math., Lwów 2, 40—50 (1930)] of the maximal subset A'' of A' on which A is consistent with any regular method B such that $B' \supset A'$. (2) In order that an $x \in A'$ belongs to A''' it is necessary and sufficient that $\sup_{k,n} \left| \sum_{i=1}^n a_{ik} x_k \right| < +\infty$. Since $A''' \subset A''$, this gives a simple sufficient condition for $x \in A''$. (3) A is perfect if $\sup_{k,n} \left| \sum_{i=1}^n a_{ik} \xi_k^{(m)} \right| < +\infty$ for almost all m . In the second part of the paper rather complicated conditions, involving the $\xi_k^{(m)}$ for two methods A, B are given which insure that A and B are boundedly consistent. They are used to show that (4) two boundedly consistent regular methods A, B exist such that there are bounded divergent sequences summable by both A and B , by A but not by B , and by B but not by A . The reviewer remarks that the considerable calculations which are used to prove (2) and (4) are not necessary. (2) follows from the conditions of convergence of linear functionals in the space l^1 . And to prove (4), let A and B be defined by the transformations $\frac{1}{4}(x_n + x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3})$ and $\frac{1}{6}(x_n + \dots + x_{n+5})$, then A and B are consistent without any restriction, and $\{1, -1, 1, -1, \dots\} \in A' \cup B'$,

$$\{1, -1, 0, 0, 1, -1, 0, 0, \dots\} \in A' - B', \quad \{1, -1, 0, 1, -1, 0, \dots\} \in B' - A'.$$

G. G. Lorentz (Toronto).

Lorentz, G. G.: Direct theorems on methods of summability. Canadian J. Math. 1, 305—319 (1949).

Die charakteristische Funktion $\omega(n)$ einer Folge $n_1 < n_2 < \dots$ von positiven ganzen Zahlen sei (für jedes $n \geq 0$) die Anzahl der n_v mit $n_v \leq n$. Eine für $n \geq 0$ definierte positive, nicht-abnehmende Funktion $\Omega(n)$ mit $\Omega(n) \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$ heiße eine S(ummabilitäts)-Funktion erster Art für ein Limitierungsverfahren A , falls sämtliche reellen, beschränkten Folgen s_n , für die die charakteristische Funktion $\omega(n)$ der Indexfolge $n_1 < n_2 < \dots$ mit nichtverschwindenden s_n der Ungleichung $\omega(n) \leq \Omega(n)$ genügt, A -limitierbar sind. Sie heiße eine S -Funktion zweiter Art für A , falls sämtliche Folgen s_n mit der Eigenschaft $s_0 + s_1 + \dots + s_n = O(\Omega(n))$ A -limitierbar sind. Eine S -Funktion zweiter Art ist auch eine solche erster Art.

Verf. gibt für Toeplitzsche Verfahren notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, daß ein gegebenes $\Omega(n)$ eine S -Funktion erster oder zweiter Art sei. Zu einer gegebenen S -Funktion $\Omega(n)$ erster oder zweiter Art für ein Verfahren A gibt es immer eine weitere $\Omega_1(n)$ mit $\Omega_1(n)/\Omega(n) \rightarrow \infty$. Falls $\Omega(n)$ eine S -Funktion erster Art eines regulären Toeplitzischen Verfahrens A ist, so kann $s_n \cdot s_{n-1} = o(\Omega(n)^{-1})$ keine Taubersche Bedingung für A sein. Verf. untersucht weiter die S -Funktionen für die Cesàroschen, Abelschen, Eulerschen, Borelschen, Riemannschen und Hausdorffschen Limitierungsverfahren.

Kloosterman (Leiden).

Barlaz, Joshua: On some triangular summability methods. Amer. J. Math. 69, 139—152 (1947).

Mittels einer Funktionenfolge $\{\psi_\nu(x)\}$, deren Funktionen auf einer Punktmenge E , die einen nicht zur Menge gehörenden Häufungspunkt ξ besitzt, erklärt sind, wird die Folge s_ν in die Funktion $\Psi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu \psi_\nu(x)$ übergeführt und der verallgemeinerte Grenzwert der Folge s_ν durch $\lim_{x \rightarrow \xi} \Psi(x) = s = \text{gen lim } s_\nu$ definiert, falls er existiert. Diesem Limitierungsverfahren hatte O. Szász, indem er eine Punktfolge $\{x_n\}$ aus E mit der Eigenschaft $x_n \rightarrow \xi$ für $n \rightarrow \infty$ auswählte, [vgl. Ann. Math., Princeton, II. S. 43, 69—83 (1942)], das folgende Verfahren, welches eine Folge s_n in die Folge $B_n(x_n) = \sum_{\nu=0}^n s_\nu \psi_\nu(x_n)$ überführt, gegenübergestellt. Dieses neue, noch von der Wahl der Folge x_n abhängende Verfahren liefert den verallgemeinerten Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(x_n) = s = \text{gen lim } s_\nu$. — In der vorliegenden Arbeit betrachtet Verf. nun den besonderen Fall

$$\psi_n(x) = (\exp(-x + n \log x))/n,$$

der dem Borelschen Summierungsverfahren entspricht. Für die Regularität des Verfahrens erweist sich als notwendig und hinreichend die Bedingung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - n)/\sqrt{n} = -\infty \quad (x_n \rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty).$$

Unter gewissen Einschränkungen der Folge $\{x_n\}$ liefert das Verfahren die analytische Fortsetzung einer durch eine Potenzreihe mit endlichem Konvergenzradius definierten Funktion im Borelschen Polygon. Es sei $f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$, $|z| < r$, $s_n(z) = \sum_{\nu=0}^n a_\nu z^\nu$ ($n = 0, 1, \dots$) und $F_n(z) = \exp(-x_n) \sum_{\nu=0}^n s_\nu(z) x_n^\nu / \nu!$. Wenn nämlich $x_n = o(n)$, $x_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$, so strebt $F_n(z) \rightarrow f(z)$ ($n \rightarrow \infty$) für alle z im Borelschen Summations-Polygon der Funktion $f(z)$. Da für $x_n = o(n)$ das Verfahren ebenso wirksam ist wie das Borelsche Verfahren, wenn es sich um die Summierung einer Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius handelt, wird es unter der gleichen Bedingung eine Fourierreihe summieren, sobald diese B -summierbar ist. Hier kommt man jedoch schon mit der einseitigen Bedingung $x_n \leq n/e + \text{const.}$ für $n > N$ aus. Endlich zeigt Verf., daß das Verfahren der arithmetischen Mittel nicht in dem erwähnten Verfahren enthalten ist und daß letzteres die Folge $s_n = (-1)^n$ für alle Folgen $\{x_n\}$ zum Wert Null summiert.

Garten (Tübingen).

Karamata, J.: Über die Beziehung zwischen dem Bernsteinschen und Cesàroschen Limitierungsverfahren. Math. Z. 52, 305—306 (1949).

Es sei $s_n = \sum_{\nu=0}^n u_\nu$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), $s_{-1} = u_{-1} = 0$. Aus $B_n = \sum_{\nu=0}^n \cos\left(\frac{\nu\pi}{2n+1}\right) u_\nu \rightarrow s$ für $n \rightarrow \infty$ folgt $\sigma_n = \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=0}^n \frac{s_{\nu-1} + s_\nu}{2} \rightarrow s$ für $n \rightarrow \infty$ und umgekehrt. Diesen

Satz hat Verf. schon früher (dies. Zbl. 29, 208) auf Umwegen bewiesen. Er gibt jetzt einen direkten Beweis, indem er die B_n durch die σ_n ausdrückt. Lösch.

Mitra, S. C.: On a method of summing divergent series. J. Indian math. Soc., n. S. 13, 4—16 (1949).

Es handelt sich um das von R. G. Cooke (dies. Zbl. 17, 303) eingeführte permanente (J, ν) -Verfahren (ν reell). Die Folge s_n ($n = 1, 2, \dots$) heißt (J, ν) -limitierbar (oder die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ mit $s_n = a_0 + \dots + a_{n-1}$ (J, ν) -summierbar) zum Wert s , wenn $2 \sum_{n=1}^{\infty} s_n J_{n+\nu}^2(\omega)$ existiert für großes positives ω und gegen s strebt für $\omega \rightarrow \infty$; dabei bedeutet $J_k(\omega)$ die Besselsche Funktion k -ter Ordnung. (Die Definition des Verfahrens ist in der besprochenen Arbeit nicht richtig wiedergegeben, jedoch wird das Verfahren nachher richtig verwendet.) Verf. behandelt zuerst die Legendresche Reihe einer im abgeschlossenen Intervall $(-1, 1)$ absolut stetigen Funktion $f(x)$, d. h. die Reihe $(1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$, wobei $P_n(x)$ das Legendresche Polynom n -ter Ordnung und $a_n = (n + \frac{1}{2}) \int_{-1}^1 f(x) P_n(x) dx$ ist. Es wird gezeigt, daß die Reihe (1) für $x = 1$ zum Wert $f(1)$ summierbar durch das $(J, 0)$ -Verfahren ist. Sodann wird das $(J, \frac{1}{2})$ -Verfahren auf die an der Stelle $x = 0$ genommene Schlömilchsche Reihe $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_0(n x)$ einer im abgeschlossenen Intervall $(0, \pi)$ definierten Funktion $f(x)$, welche dort eine stetige Ableitung beschränkter Schwankung besitzt, angewendet; es wird festgestellt, daß Summierbarkeit zum Wert $f(0)$ vorliegt. (Bemerkung des Ref.: Im abgeschlossenen Intervall $(0, \pi)$ herrscht Konvergenz zum Wert $f(x)$ [vgl. z. B. G. N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge 1922, insbes. 619], so daß die Notwendigkeit der Benützung eines Summierungsverfahrens nicht einzusehen ist.) Schließlich wendet Verf. das J -Verfahren auf Fouriersche Reihen an, wie es auch schon Cooke (a. a. O.) getan hat. Über Cooke hinaus werden hinreichende Bedingungen für die $(J, 0)$ -Summierbarkeit der konjugierten Reihe und die $(J, \frac{1}{2})$ -Summierbarkeit der abgeleiteten Reihe einer Fourierschen Reihe angegeben. Meyer-König (Stuttgart).

Scott, W. T. and H. S. Wall: On the convergence and divergence of continued fractions. Amer. J. Math. 69, 551—561 (1947).

Wenn für eine Folge komplexer Zahlen x_1, x_2, \dots wenigstens eine der drei Aussagen zutrifft: $\sum |x_{2n+1}|$ divergiert, $\sum |x_{2n+1}(x_2 + x_4 + \dots + x_{2n})^2|$ divergiert, $\lim |x_2 + x_4 + \dots + x_{2n}| = \infty$, so wird gesagt, die Folge erfüllt die Bedingung H . Mit dieser Terminologie beweisen die Verff.: Für die Konvergenz des Kettenbruchs $1/b_1 + 1/b_2 + \dots$ ist notwendig, daß die Folge b_1, b_2, \dots die Bedingung H erfüllt. Die Bedingung ist aber nicht hinreichend, wie einfache Beispiele zeigen. Es werden daher zusätzliche hinreichende Bedingungen gesucht; unter den gewonnenen Theoremen sei folgendes hervorgehoben, aus dem sich, wie gezeigt wird, viele ältere Kriterien leicht als Spezialfälle gewinnen lassen: Sei $b_{2n-1} = k_{2n-1} z_n$, $b_{2n} = k_{2n}$, $k_1 > 0$, $k_{2n+1} \geq 0$, $\Re(k_{2n}) \geq 0$, $\Re(z_n) \geq \delta > 0$, $|z_n|$ beschränkt. Dann konvergiert der Kettenbruch $1/b_1 + 1/b_2 + \dots$ dann und nur dann, wenn die Folge k_1, k_2, \dots die Bedingung H erfüllt. Ein ähnliches Kriterium bezieht sich auf gleichmäßige Konvergenz. Perron (München).

Edrei, Albert: Sur les suites de nombres liées à la théorie des fractions continues. Bull. Sci. math., II. S. 72_I, 45—64 (1948).

Verf. nennt eine Folge $\{c_i\}$ von komplexen Zahlen verkettet, wenn die Zahlen $\gamma_1 = c_1$, $\gamma_i = \frac{c_i}{1 - \gamma_{i-1}}$ von Null und 1 verschieden sind; eigentlich verkettet, wenn ihr Betrag immer < 1 ist. Der Kettenbruch $\frac{1}{1} - \frac{c_1}{1} - \dots - \frac{c_n}{1} - \dots$ ist mit

der Reihe $1 + p_1 + p_1 p_2 + p_1 p_2 p_3 + \dots$ äquivalent, wo $p_i = \frac{\gamma_i}{1 - \gamma_i}$. Jede positive eigentlich verkettete Folge erzeugt eine Reihe mit positiven Gliedern, deren erstes Glied 1 ist, und umgekehrt. Ist der Kettenbruch konvergent, so fügt Verf. der Folge den Buchstaben *C* bei, sonst *D*. Hat eine positive Folge eine Folge *D* zur eigentlichen Majorante, so ist sie vom Typus *C*. Jede Folge vom Typus *C* hat eine vom Typus *D* und auch eine vom Typus *C* zur Majorante. Eine positive, nicht eigentlich verkettete Folge hat stets eine Minorante vom Typus *D*. Dafür, daß eine Folge eigentlich verkettet sei, ist notwendig und hinreichend, daß die Näherungsnenner positiv sind oder daß die Näherungsbrüche streng monoton wachsen, oder daß die Nullstellen der Näherungsnenner der Folge $\{c_i z\}$, als Polynome in z , alle positiv und größer sind als 1. In einer eigentlich verketteten Folge ist die Summe zweier benachbarter Glieder stets kleiner als 1. Umgekehrt ist eine Folge eigentlich verkettet, wenn die Summe zweier benachbarter Glieder stets kleiner ist als 1/2. Verf. gibt noch einige Sätze über die Konvergenz verketteter Folgen. Schließlich gibt er noch mit Hilfe seiner Methoden einen neuen Beweis eines Satzes von van Vleck: Es seien r_i reelle positive Zahlen kleiner als 1, θ_i komplexe Zahlen mit einem Betrag nicht größer als 1, so konvergiert der Kettenbruch

$$\frac{r_1 \theta_1 x}{1} + \frac{r_2 (1 - r_1) \theta_2 x}{1} + \dots$$

gleichmäßig für $|x| \leq 1$.

Ott-Heinrich Keller (Dresden).

Bellman, Richard and Ernst G. Straus: Continued fractions, algebraic functions and the Padé table. Proc. nat. Acad. Sci. USA 35, 472—476 (1949).

Die Funktion $f(x)$ besitze im Nullpunkt eine Potenzreihenentwicklung. Zu jedem Paar m, n gibt es ein Polynom $P_{m,n}$ von m , und ein Polynom $Q_{m,n}$ vom n . Grade, so daß $P_{m,n}(x) + f(x)Q_{m,n}(x) = x^{m+n+1} + \dots$. Diese Polynome bilden die Padésche Tafel. Die Polynome der Diagonale und der Nebendiagonale ergeben sich aus der Kettenbruchentwicklung von $f(x)$. Verff. betrachten nun insbesondere algebraische Funktionen und benutzen z. B. den Satz, daß dann die Anzahl der Nullstellen gleich der der Pole ist. So können sie die Quadratwurzeln aus Polynomen 3. und 4. Grades behandeln. In anderen Fällen reicht dieser Satz nicht aus, und es müssen weitere Beziehungen zwischen Nullstellen und Polen herangeholt werden. Auch dafür geben die Verff. Beispiele. Die Beweise werden sie später mitteilen.

Ott-Heinrich Keller (Dresden).

Approximation und Reihendarstellung reeller Funktionen:

Zamansky, Marc: Sur l'approximation des fonctions continues. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 463—464 (1948).

The au. gives an estimate for the derivatives of trigonometric polynomials of best approximation to a continuous function. He further proves that

$$f(x) - \sigma_n(x) = O(n^{-1})$$

holds uniformly in x for the Fejér's sum $\sigma_n(x)$ of $f(x)$ if and only if

$$\int_{\epsilon}^{\infty} t^{-2} [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] dt$$

is uniformly bounded in x and ϵ .

G. G. Lorentz (Toronto).

● Markov (Markoff), A. A.: Ausgewählte Schriften zur Theorie der Kettenbrüche und der Theorie der Funktionen, die möglichst wenig von Null abweichen. Moskau-Leningrad: OGIS, Staatsverlag für techn.-theoret. Lit. 1948. 412 S. Rubel 15,25. [Russisch].

Das Werk bringt nach einer kurzen Skizze von Markoffs Leben und Schaffen eine Reihe seiner z. T. klassisch gewordenen Abhandlungen zur Approximations-

theorie und Kettenbruchlehre im Neudruck bzw. in russischer Übersetzung. Es handelt sich um die an nachstehend aufgeführten Stellen erschienenen Arbeiten: 1. In französischer Sprache: Math. Ann., Berlin **25**, 172—181 (1884), **27**, 143—150, 172—182 (1886), **47**, 579—597 (1896); Ann. sci. École norm. sup., III. S. **3**, 81—88 (1886), Acta math., Stockholm **19**, 93—104 (1895), Bull. Acad. Sci. St. Pétersbourg, V. S. **9**, 435—446 (1898); 2. In russischer Sprache: Abh. Akad. Wiss. St. Petersburg **62** (1889), 24 S., **74** (1894) [von dieser Arbeit ist eine Übersetzung ins Englische im Duke math. J. **7**, 85—96 (1940) erschienen]. Denkschr. Akad. Wiss. St. Petersburg, VIII. S. **6**, Nr. 5 (1897), 69 S. — Die beiden letzten bisher nicht gedruckten Abhandlungen sind überarbeitete Nachschriften zweier Vorlesungen, die Markoff 1906 gehalten hat. Die erste betrifft die Funktionen, die am wenigsten von Null abweichen, und führt in leicht faßlicher Weise mit völlig elementaren Methoden in die Gedankengänge dieser von Tschebyscheff begründeten Theorie ein. Markoff entwickelt die Grundbegriffe, beweist den grundlegenden Satz von Tschebyscheff (der eine notwendige Bedingung dafür, daß eine Funktion am wenigsten von Null abweicht, mittels der Zeichenwechsel an den Extremalstellen gibt) und behandelt dann einige spezielle Aufgaben, als schwierigste, die Werte p_1, \dots, p_n der Parameter in dem Ausdruck

$$f(x) = \frac{x^n + p_1 x^{n-1} + \dots + p_n}{\sqrt[n]{\psi(x)}}, \quad \psi(x) \text{ ein gegebenes Polynom } 2n\text{-ten Grades,}$$

so zu bestimmen, daß $f(x)$ am wenigsten von Null abweicht, d. h. daß $\max |f(x)|$ ($-1 \leq x \leq 1$) ein Minimum ist. Zum Schluß wird noch die gewissermaßen umgekehrte Frage untersucht, nämlich für die Parameter Ungleichungen zu finden, wenn für diese eine lineare Relation und für die Abweichung der Funktion Schranken gegeben sind. — Die zweite Vorlesung behandelt Kettenbrüche und beschäftigt sich nach einigen allgemeinen Betrachtungen mit dem Gaußschen Kettenbruch für den Quotienten zweier hypergeometrischer Reihen sowie mit der Entwicklung der (endlichen oder unendlichen) Summe $\sum_t \theta(t)/(x-t)$ in einen Kettenbruch. Anwendung

finden die Ergebnisse zur näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale mittels derartiger Entwicklungen. — Der Anhang enthält einige historische und kritische Anmerkungen sowie den Abdruck einer Arbeit von K. A. Possé (Mitt. math. Ges. Charkow **1885**, 35—58), die Gedankengänge der ersten der oben angeführten Markoffschen Abhandlungen vereinfacht und vervollständigt. *W. Hahn.*

Stečkin, S. B.: Verallgemeinerung einiger Ungleichungen von S. N. Bernstein. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **60**, 1511—1514 (1948) [Russisch].

Es sei $t_n(x)$ ein trigonometrisches Polynom vom Grade n , h eine Zahl zwischen 0 und $2\pi/n$. Verf. beweist: Für jede natürliche Zahl r gilt die Ungleichung

$$\max_x |t_n^{(r)}(x)| \leq n^r (2 \sin n h/2)^{-r} \max_x |\Delta_h^r t_n(x)|$$

(dabei ist $\Delta_h^r t_n(x) = \sum_{i=0}^r (-1)^{r-i} \binom{r}{i} t_n(x + i h)$). Das Gleichheitszeichen gilt nur für das Polynom $t_n = a \cos nx + b \sin nx + c$. Beim Beweis spielt der folgende Hilfssatz eine Rolle: Es sei $\max_x |t_n(x)| = L > 0$ und $t_n(x_0) = L$. Dann ist $t_n(x_0 + \eta) \geq L \cos n \eta$ ($|\eta| \leq \pi/n$).

W. Hahn (Berlin).

Bernštejn (Bernstein), S. N.: Erweiterung der Ungleichung von S. B. Stečkin auf ganze Funktionen endlichen Grades. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **60**, 1487—1490 (1948) [Russisch].

Es sei $G_p(x)$ eine beliebige ganze Funktion des Grades p , ferner sei die Zahl $\beta < 2\pi/p$ gegeben. Dann gilt die Ungleichung

$$|G'_p(x)| \leq p (2 \sin p \beta/2)^{-1} \sup_x |G_p(x + \beta/2) - G_p(x - \beta/2)|$$

für alle endlichen x . Diese Ungleichung entspricht der von Stečkin (s. vorsteh. Ref.) aufgestellten im Fall $r = 1$. Verf. beweist außerdem noch die weitergehende Ungleichung

$$G_p(x + \beta/2) - G_p(x - \beta/2) \geq 2 (\sin p\beta/2) \sup_x |G_p(x)|.$$

W. Hahn (Berlin).

Nikol'skij, S.: Verallgemeinerung einer Ungleichung von S. N. Bernstein. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 60, 1507—1510 (1948) [Russisch].

Das vom Verf. bewiesene Ergebnis liegt in gleicher Richtung wie die der beiden vorstehend besprochenen Arbeiten, bezieht sich aber auf ganze Funktionen vom Exponentialtyp der Ordnung ϱ . Ist $f(x)$ eine solche Funktion, so genügt die k -te Ableitung auf der ganzen reellen Achse der Ungleichung $\sup |f^{(k)}(x)| \leq \varrho^k \omega^{(k)}(f, \varrho/\pi)/2^k$. Dabei ist $\omega^{(k)}(f, h) = \sup |A_h^k f(x)|$ in der Bezeichnung des vorletzten Referates. Das Gleichheitszeichen tritt nur für die Funktion $f(x) = \sin \varrho x$ ein. W. Hahn.

Nikol'skij, S.: Über die beste Annäherung im Mittel von Funktionen mit Singularitäten der Form $|a - x|^s$ durch Polynome. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 55, 195—198 (1947) [Russisch].

Die fragliche Annäherung ist durch

$$E_{n,r(x)}(f)_L = \min_{P_n} \int_{-1}^{+1} |f(x) - P_n(x)| r(x) dx$$

erklärt; $r(x)$ ist eine gegebene Gewichtsfunktion. Verf. gibt zunächst eine asymptotische Formel ($|a| < 1$, $s > -1$)

$$E_{n,1}(|a - x|^s) = (1 - a^2)^{(s+1)/2} E_{n,1}(|x|^s)_L + O(n^{-s-2} \log n)$$

und zeigt dann, daß man diese Formel unter gewissen Voraussetzungen auf Funktionen der Gestalt $f(x) = \sum A_k |x - a_k|^s$ gewissermaßen gliedweise anwenden kann; die Summe kann auch u. U. unendlich viele Glieder enthalten. Hahn.

Mergeljan, S. N.: Über die beste Annäherung in einander berührenden Gebieten. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 61, 981—983 (1948) [Russisch].

Ist eine Funktion $f(z)$ in zwei verschiedenen Gebieten erklärt, die jedoch einander berühren, und bildet man die „beste Annäherung“ von $f(z)$ durch Polynome n -ten Grades, so hängt das Verhalten dieser „Annäherung“, insbesondere ihre Konvergenz gegen Null, nicht nur von der Funktion $f(z)$ ab, sondern auch von der gegenseitigen Lage der beiden Gebiete. Verf. teilt ohne Beweis einige Sätze in dieser Richtung mit. Vgl. auch die in dies. Zbl. 33, 358 besprochene Note des Verf.

W. Hahn (Berlin).

Timan, A. F.: Einige asymptotische Abschätzungen für die Polynome von N. I. Achiezer und B. M. Levitan. Doklady Akad. Nauk SSSR, II. S. 64, 175—178 (1949) [Russisch].

Dans un travail Achiezer et Levitan [Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 14, 419—421 (1937); ce Zbl. 16, 390] ont généralisé la méthode de sommation de Fejér dans le sens suivant: soit $0 < \theta_n \leq 1$ une suite arbitraire de nombres et posons $G_n(x) = \frac{1}{\pi x^2} \left(\cos \frac{1 - \theta_n}{\theta_n} x - \cos \frac{x}{\theta_n} \right)$. Pour chaque fonction $f(x)$ mesurable sur l'axe réel pour laquelle $\frac{f(x)}{1+x^2} \in L(-\infty, \infty)$ on fait correspondre l'intégrale

$$\sigma_n(f; \theta_n; x) = \int_0^\infty \left\{ f\left(x + \frac{t}{n\theta_n}\right) + f\left(x - \frac{t}{n\theta_n}\right) \right\} G_n(t) dt.$$

Soit C (respectivement \tilde{C}) l'espace des fonctions continues sur l'axe réel (respectivement continues, de période 2π). L'A. étudie le comportement asymptotique des constantes de Lebesgue relativement cette méthode. Il démontre le théorème

suivant: pour $\theta_n \geq 1/n$ on a $\tilde{L}_n = \|\sigma_n(f; \theta_n; x)\|_{\tilde{C}} = \|\sigma_n(f; \theta_n; x)\|_C + O(1) = \frac{4}{\pi^2} \ln \frac{1}{\theta_n} + O(1)$. Pour $\theta_n \leq 1/n$ on a $\tilde{L}_n = \frac{4}{\pi^2} \ln n + O(1)$, $L_n = \|\sigma_n(f; \theta_n; x)\|_C = \frac{4}{\pi^2} \ln \frac{1}{\theta_n} + O(1)$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \theta > 0$, il existe la limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{L}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \frac{2}{\pi \theta} \int_0^{\infty} \frac{|\sin(2 - \theta)t \sin \theta t|}{t^2} dt.$$

N. Obrechhoff (Sofia).

Wintner, Aurel: The sum formula of Euler-Maclaurin and the inversions of Fourier and Möbius. Amer. J. Math. 69, 685—708 (1947).

Die vorliegende Arbeit, welche frühere Untersuchungen des Verf. [An arithmetical approach in to ordinary Fourier series, Baltimore, 1945] fortsetzt, behandelt die Berechnung uneigentlicher Integrale durch äquidistante Unterteilung des Integrationsintervalles und deren Zusammenhang mit der Fourierschen und Möbiusschen Inversion. — Der Zusammenhang mit der Möbiusschen Inversion beruht auf folgendem Theorem (x): Ist $f(x)$ für jedes $\varepsilon > 0$ in $0 < \varepsilon \leq x \leq 1$ stetig und existiert der Grenzwert $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n \leq 1/\varepsilon} f(n\varepsilon)$ (1), so konvergiert das uneigentliche Integral

$\int_0^1 f(x) dx$ (2) und hat denselben Wert wie der Grenzwert (1). Ein Spezialfall dieses Theorems ist der von Hardy und Littlewood stammende Satz, welcher das Primzahltheorem enthält,

(α_0): Jede im Lambertschen Sinne (L) summierbare Reihe ist es auch im Abelschen Sinne (A). Mit Rücksicht darauf, daß sich die Meßbarkeit einer Funktion $f(x)$ mit weitgehender Unstetigkeit derselben verträgt, ist folgende Verallgemeinerung von (x) bemerkenswert: (α^*) Es genügt, statt der Stetigkeit von $f(x)$ für jedes $\varepsilon > 0$ auf $0 < \varepsilon \leq x \leq 1$ daselbst L-Integrierbarkeit vorauszusetzen. Die Umkehrung von (x) läßt sich nicht ohne zusätzliche Voraussetzungen über $f(x)$ bewerkstelligen. In dieser Richtung beweist Verf. folgendes Kriterium (β): Wenn $f(x)$ in

$0 < \varepsilon \leq x \leq 1$ von beschränkter Variation und außerdem $\int_{\varepsilon}^1 |df(x)| = o(\varepsilon^{-1})$ ist, so zieht die

Konvergenz des uneigentlichen Integrales (2) die Existenz des Grenzwertes (1) nach sich, welcher dann denselben Wert wie das uneigentliche Integral hat. Hieraus folgt (β_0): Jede absolut (A)-summierbare Reihe ist auch (L)-summierbar. Dieser Satz ist eine teilweise Umkehrung von (α_0). — Es hat den Anschein, als ob nur die Möbiussche Inversion in den bisherigen Darlegungen enthalten sei. Der Zusammenhang mit der Fourierschen Inversion wird aber offenbar, wenn man von der bei $x = 1$ endenden Summe (1) zur unendlichen Summe übergeht. Diese Summe ist ein Euler-Maclaurinscher Ausdruck, dessen Fouriersche Zerlegung leicht ausgeführt werden kann, wenn man von einer passenden Darstellung der Euler-Maclaurinschen Summenformel ausgeht. Als Grundlage für diese Entwicklungen dient die folgende Bemerkung: (I) Wenn $f(x)$ für $x \geq 1$

von beschränkter Variation, also $\int_1^{\infty} |df(x)| < \infty$ (3) ist und der dann vorhandene Grenzwert

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ den Wert $f(\infty) = 0$ hat, so existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^{[x]} f(n) - \int_1^x f(u) du \right)$ (4)

und ist gleich $\int_1^{\infty} (x - [x]) df(x)$ (5). Dieser Satz läßt sich dahin verallgemeinern,

daß der Grenzwert (4) auch dann noch existiert und gleich dem Integralausdruck (5) ist, sobald das Lebesgue-Stieltjessche Integral von $u - [u]$ in bezug auf $f(u)$ in jedem endlichen Intervall $1 \leq u \leq x$ vorhanden ist, für $x \rightarrow \infty$ gegen einen endlichen Grenzwert strebt und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$

gilt. Als Folgerung aus (I) sei nur angeführt, daß die Berechnung eines konvergenten doppelt

uneigentlichen Integrals $\int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x$ durch Bildung von $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} f(n\varepsilon)$, also mit Hilfe äquidistanter Unterteilung des Integrationsintervalles, immer dann möglich ist,

wenn $f(x)$ der Bedingung $\int_{\varepsilon}^{\infty} |df(x)| = o(\varepsilon^{-1})$ (6) genügt. Erfüllt $f(x)$ statt (6) nur die Bedingung

$\int_0^{\infty} |df(x)| < \infty$ (7) und ist $f(\infty) = 0$, so gilt die Limesbeziehung $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} f(n\varepsilon) e^{i\lambda n \varepsilon} = \int_0^{\infty} f(x) e^{i\lambda x} dx$,

wenn λ eine von Null verschiedene reelle Zahl bedeutet. — Es sei $\mu^*(x) = \sum_{n=1}^{[x]} \mu(n)/n$, worin

$\mu(n)$ die Möbiussche Funktion bedeutet. Um zu zeigen, daß aus $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu^*(n)|/n < \infty$ der obige Satz (α^*) folgt, genügt es, den Hardy-Littlewoodschen Beweis für (α_0) zu wiederholen. Gleichzeitig erhält man dabei die folgende Verschärfung von (α^*): (II) $f(x)$ sei für jedes $\varepsilon > 0$ auf $0 < \varepsilon \leq x$ L -integrierbar und konvergiere für $x \rightarrow \infty$ hinreichend rasch gegen Null, z. B. so, daß $f(x) = O(x^{-1-\eta})$ für ein $\eta > 0$ gilt. Existiert dann der Grenzwert $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{n=1}^{\infty} f(n\varepsilon)$ (8),

so konvergiert auch das uneigentliche Integral $\int_{+0}^{\infty} f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\infty} f(x) dx$ und hat den Wert (8).

— Bevor (II) mit der Fourierentwicklung des Kernes $x - [x]$ im Euler-Maclaurinschen Integral (5) kombiniert wird, ist es zweckmäßig, obige Verallgemeinerung von (I) durch folgende Variante zu ersetzen: (III) Für die in $x > 0$ definierte Funktion $f(x)$ sei $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon f(\varepsilon) = 0$, und das Lebesgues-Stieltjessche Integral von $u - [u]$ in bezug auf $f(u)$ soll für jedes $\varepsilon > 0$ auf jedem beschränkten Intervall $\varepsilon \leq u \leq x$ existieren. Ferner wird vorausge-

setzt, daß die beiden uneigentlichen Integrale $\int_{+0}^{\infty} u df(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{1-0} u df(u)$, $\int_{+0}^{\infty} (u - [u]) df(u) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{1-0} (u - [u]) df(u)$ (9)

wenigstens bedingt konvergieren. Dann existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^{[x]} f(n) - \int_0^x f(u) du \right)$

und ist gleich dem Wert von $\int_{+0}^{\infty} (u - [u]) df(u)$, der Summe der beiden Integrale (9).

— Es sei nun $f(x)$ für jedes $\varepsilon > 0$ auf $0 < \varepsilon \leq x$ von beschränkter Variation,

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ und (6) erfüllt. Ferner sei das uneigentliche Integral $\int_{+0}^{\infty} f(x) dx$ wenigstens bedingt konvergent. Dann ist für $t > 0$ der Grenzwert

$$(10) \quad F^*(t) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(t \sum_{n=1}^{[x/t]} f(n t) - \int_{+0}^x f(u) du \right)$$

vorhanden und hat den Wert $F^*(t) = t \int_{+0}^{\infty} (x/t - [x/t]) df(x)$ (11). Ferner konver-

giert das uneigentliche Integral $f^*(t) = \int_{+0}^{\infty} f(x) \cos(tx) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 f(x) dx + \lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{\infty} f(x) dx$ (12) und

stellt für $t > 0$ eine stetige Funktion von t dar. Ist $f(x)$ für $x > 0$ von beschränkter Variation und $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, so konvergiert die zu (12) gehörige Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f^*(n t)$ (13) für jedes $t > 0$ und ist mit der Euler-Maclaurinschen Funktion (10) durch

$$F^*(t) = -\frac{1}{2} t f(+0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} f^*(2\pi n/t), \quad t > 0$$

verknüpft, wenn $f(x)$ so definiert ist, daß $2f(x) = f(x+0) + f(x-0)$, $x > 0$ (14) wird. Ferner hat man für $t > 0$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} f(n\varepsilon) \cos(t n \varepsilon) \right) = f^*(t) \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} f(n\varepsilon) \sin(t n \varepsilon) \right) = \int_0^{\infty} f(x) \sin(tx) dx.$$

Wenn $f(x)$ für $x > 0$ von beschränkter Variation ist und das uneigentliche Integral

$$f^*(0) = \int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(x) dx \text{ konvergiert, so ist für}$$

$$(13) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} f^*(n t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow +0} t \sum_{n=1}^{\infty} f^*(n t) = \frac{1}{2} \pi f(+0)$$

und für $t > 0$

$$t^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2} f(+0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n t) \right\} = t^{-\frac{1}{2}} \left\{ f^*(0) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} f^*(2\pi n/t) \right\}.$$

Ferner gilt $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} f^*(n \varepsilon) = \int_{+0}^{\infty} f^*(t) dt$. — Nachdem Verf. den Zusammenhang der Euler-Maclaurinschen Summenformel mit der Fourierschen Inversion behandelt hat, wird auch die

Möbiussche Inversion in die Erörterungen einbezogen. Hier sollen nur folgende beiden Ergebnisse angeführt werden: Genügt $f(x)$ den Bedingungen (7), (14) und $f(\infty) = 0$ und ist entweder für ein $\alpha > 1$ $f^*(t) = O(t^{-\alpha})$ bei $t \rightarrow \infty$ oder für ein $\beta > 1$ $F^*(t) = -\frac{1}{2} f(+0) t + O(t^\beta)$ bei $t \rightarrow +0$, so ist die Möbiussche Entwicklung $f^*(2\pi/t) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) F^*(t/n)$ für jedes $t > 0$

gültig, worin $F^*(t)$ und $f^*(t)$ die durch (10) und (12) erklärten Funktionen sind. Diese Aussage ist entweder elementar oder enthält das Primzahltheorem, je nachdem $f(+0) = 0$ oder $f(+0) \neq 0$ ist. — Erfüllt $f(x)$ die Bedingungen (7) und (14), ist ferner für ein $\eta > 0$ bei $x \rightarrow \infty$

$f(x) = O(x^{-1-\eta})$ und bleibt $f^*(t) = \int_0^{\infty} f(x) \cos(tx) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(x) \cos(tx) dx$ auch für $t = 0$ konvergent, so

läßt sich mit Hilfe der Euler-Maclaurinschen Funktion $F^*(t) = t \sum_{n=1}^{\infty} f(n/t) - \int_0^{\infty} f(x) dx$ für

$f(x)$ folgende für $x > 0$ gültige Möbiussche Entwicklung $xf(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) F^*(nx)/n$ aufstellen. Diese Aussage ist elementar oder enthält das Primzahltheorem, je nachdem das Integral

$f^*(0) = \int_0^{\infty} f(x) dx = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(x) dx$ den Wert Null hat oder nicht. Als Spezialfall wird schließlich

$f(x) = e^{-x^\lambda}$, $\lambda > 0$ diskutiert. — Wegen näherer Einzelheiten, insbesondere die Literatur-nachweise betreffend, muß auf die Arbeit selbst und auf das ihr beigefügte Schriftenverzeichnis verwiesen werden. *Lammell (Tutzing).*

Rajagopal, C. T.: On Riesz summability and summability by Dirichlet's series. Amer. J. Math. **69**, 371—378 (1947).

Bekanntlich zieht die Summierbarkeit einer Funktion mittels der Rieszschen Mittel k -ter Ordnung ($k > 0$) die Summierbarkeit der Funktion mittels der Laplace-transformation nach sich. In Verallgemeinerung des Falles $k = 1$ bei O. Szász [Trans. Amer. math. Soc. **39**, 117—130 (1936); dies. Zbl. **13**, 262] behandelt Verf. das Umkehrproblem im Fall $k \geq 1$ und gelangt zu folgendem Ergebnis: Es sei

$$A_0(x) = A(x), \quad A_r(x) = r \int_0^x (x-t)^{r-1} A(t) dt \quad (r > 0)$$

$\sigma_k(x) = A_k(x)/x^k$ und $F(y) = y \int_0^{\infty} A(t) \exp(-ty) dt$ konvergent für $y > 0$. Aus

$\lim_{y \rightarrow +0} F(y) = s$ und der Bedingung

$$(k+1) \{x A_k(x) - A_{k+1}(x)\} \geq -K x^{k+1} \quad (k \geq 0, K > 0, x > 0)$$

folgt $\lim_{x \rightarrow \infty} \sigma_{k+1}(x) = s$, während $\sigma_k(x)$ i. a. keinen Grenzwert besitzt. Das zweite

Ergebnis dieser Mitteilung stellt eine Übertragung eines Schwankungssatzes Tauberscher Art, der für Cesàrosche und Abelsche Mittel von Ramaswami [J. London math. Soc. **10**, 294—308 (1935); dies. Zbl. **12**, 403] aufgestellt und bewiesen wurde, auf Riesz- und Laplace-Mittel dar. Die Ausführungen verlaufen analog denen bei Garten-Knopp [Math. Z. **42**, 365—388 (1937); dies. Zbl. **16**, 20], wo aus einer Ungleichung zwischen den Hauptlimites Cesàroscher und Abelscher Mittel bereits der ursprüngliche Satz von Ramaswami hergeleitet wurde. *Garten (Tübingen).*

Wintner, Aurel: On Töpler's wave analysis. Amer. J. Math. **69**, 758—768 (1947).

Verf. stellt unter Heranziehung des Lebesgueschen Integralbegriffes und Hilberts Theorie beschränkter Matrizen, namentlich der Theorie der beschränkten D -Matrizen von Toeplitz, die von Töpler herrührende Verallgemeinerung der harmonischen Analyse (für ein endliches Zeitintervall), bei der an Stelle der Funktionen $\sin nt$ bzw. $\cos nt$ die Terme $\varphi(nt)$ treten, wobei $\varphi(t)$ eine willkürliche periodische Funktion bedeutet, auf eine moderne solide Grundlage. — Es gelingt so dem Verf., die Lösung des Töpler-Boltzmannschen Problems in folgender Fassung zu begründen: Sei $\{\varphi_n\}$ eine Folge fester Zahlen derart, daß die Dirichletsche Reihe

$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n/n^s$ in der Halbebene $\sigma > 0$ konvergiert und die beiden Bedingungen $|\Phi(s)| < \text{const.}$, $|1/\Phi(s)| < \text{const.}$ ($\sigma > 0$, $s = \sigma + it$) erfüllt. — Dann definiert $\varphi(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin nt$ eine Funktion der Klasse (L^2), so daß die im Sinne der Konvergenz im Mittel (L^2) zu verstehende Beziehung $f(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi(nt)$ eine eindeutige Zuordnung zwischen allen Folgen $\{c_n\}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$ und allen Funktionen $f(t)$ der Klasse (L^2) über $(0, \pi)$ vermittelt. Wesentlich ist hier, daß die Funktionen $\varphi(nt)$ i. a. kein orthogonales Funktionensystem bilden, so daß die c_n weder auf die Fouriersche Weise gewonnen noch aus der Minimumseigenschaft bestimmt werden können.

Garten (Tübingen).

Hardy, G. H. and J. E. Littlewood: A new proof of a theorem on rearrangements. J. London math. Soc. 23, 163—168 (1949).

Let r, p, q be real parameters satisfying $1 \leq r, 1 < p \leq 2 \leq q$ and $A(p), A(q)$ positive constants depending only on p, q respectively. Denote c_n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) a sequence of complex numbers tending to 0 as $n \rightarrow \pm \infty$. Let $c_0^* \geq c_1^* \geq c_2^* \geq \dots$ be the sequence $|c_n|$ rearranged in descending order of magnitude. Finally, let $S_r^*(c) = (\sum c_n^{*r} (|n| + 1)^{r-2})^{1/r}$ and for any measurable f let $J_r(f) = (2\pi)^{-1} \left(\int_{-\pi}^{+\pi} |f|^r d\theta \right)^{1/r}$. The note contains three parts: — I. If $0 < S_q^*(c) < \infty$, then $\sum c_n e^{n\theta i}$ and $\sum c_n^* e^{n\theta i}$ are Fourier series of the functions $f(\theta) \in L^q$ and $f^*(\theta) \in L^q$ respectively. Further (1) $J_q(f) \leq A(q) J_q(f^*)$. Suppose that $0 < J_p(f) < \infty$ and that $\sum c_n e^{n\theta i}$ is the Fourier series of $f(\theta)$, then (2) $J_p(f^*) \leq A(p) J_p(f)$. [J. London math. Soc. 6, 3—9 (1931); dies. Zbl. 1, 135.] They give now the following complete sketch of the proof:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & (4) \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & (C) \rightarrow (6) \rightarrow (2) \\
 & & & & & & \uparrow \\
 (R) & \rightarrow & (1') & \rightarrow & (5') & \rightarrow & (5) \rightarrow (1) \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & (3') & & (J) & & (3)
 \end{array}$$

Here (3) and (4) denote the elementary inequalities $A_1(q) \leq J_q(f^*)/S_q^*(c) \leq A_2(q)$ and $A_1(p) \leq J_p(f^*)/S_p^*(c) \leq A_2(p)$, further (5), (6) denote $J_q(f) \leq A_3(q) S_q^*(c)$, $S_p^*(c) \leq A_3(p) J_p(f)$ respectively. (1'), (3') and (5') are the case $q = 2k$ ($k = 1, 2, \dots$) of (1), (3) and (5) respectively. Finally, (C) and (J) are two methods called by the authors „conjugacy“ and „interpolation“. The second one is connected with Marcell Riesz's convexity theorem for linear and bilinear operations [Acta math., Uppsala 49, 465—497 (1926)]. The inequalities (5) and (6) are also true for a general system of orthonormal functions with a common upper bound [R. E. A. C. Paley, Studia Math., Lwów 3, 226—238 (1931); this Zbl. 3, 352]. — II. (R) denotes the inequality (1) for the special case in which $q = 2k$, $c_n = c_{-n}$, $|c_n| \leq c_0$ and there are only a finite number of c_n differing from 0. This (R) is a simple consequence of another inequality of the authors [J. London math. Soc. 3, 105—110 (1928)]. In this paper they give a short proof of (R) with $A(2k) = (2k-1)^{1/2k}$. — III. They raise some unsolved questions concerning (1) and (2): 1° For the case of (1) in which $q = 2k$ and all c_n 's are zero except for a finite number, it is known that the best possible value of $A(2k)$ is 1 [R. M. Gabriel, Proc. London math. Soc., II. S. 33, 32—51 (1932); this Zbl. 3, 6]. However for general q and c_n it is not known whether $A(q) = 1$ or not. 2° For (2) the question $A(p) = 1$ is open also in the special case

$q = 2k$. 3° We have supposed $p > 1$; for $p = 1$ we do not know whether or not

$$\int_{-\pi}^{+\pi} |f^*| d\theta \leq A \int_{-\pi}^{+\pi} |f| d\theta \quad (\text{with some large } A > 0).$$

Especially; is it true or not that

$$A \log N \leq \int_{-\pi}^{+\pi} \left| \sum_{\nu=1}^N \cos m_\nu \theta \right| d\theta \quad \text{for all sets of positive (different) integers } m_\nu?$$

Gál (Paris).

Sz.-Nagy, Béla de: Sur une classe générale de procédés de sommation pour les séries de Fourier. Hung. Acta Math. 1, 14—52 (1948).

Es sei $\varphi(u)$ eine in $0 \leq u \leq 1$ erklärte Funktion, für die $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = 0$ gilt. Eine umfassende Klasse von Summierungsverfahren für unendliche Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ wird dadurch erzeugt, daß man an Stelle der Teilsummen mit einer Funktion $\varphi(u)$ die Summen

$$a_0 + \varphi\left(\frac{1}{n}\right)a_1 + \varphi\left(\frac{2}{n}\right)a_2 + \cdots + \varphi\left(\frac{n-1}{n}\right)a_{n-1}$$

bildet und deren Grenzwert für $n \rightarrow \infty$ im Falle seiner Existenz als „Summe“ der Reihe erklärt. Die Verfahren erweisen sich als permanent, wenn $\varphi(u)$ bei $u = 0$ nach rechts stetig und überdies in $0 \leq u \leq 1$ schwankungsbeschränkt ist; dies wird im folgenden für die „summatorischen Funktionen“ $\varphi(u)$ vorausgesetzt. — In der vorliegenden Arbeit werden die genannten Verfahren ausschließlich auf Fourierreihen angewandt. Es sei $f(x)$ eine mit der Periode 2π periodische, summierbare Funktion und

$$f(x) \sim c_0/2 + c_1(x) + c_2(x) + \cdots \quad \text{mit} \quad c_k(x) = a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

ihre Fourierreihe. Als Analoga der Teilsummen ergeben sich hier bei Anwendung des zu $\varphi(u)$ gehörigen Verfahrens die Summen

$$\sigma_n(f; x) = \frac{c_0}{2} + \varphi\left(\frac{1}{n}\right)c_1(x) + \cdots + \varphi\left(\frac{n-1}{n}\right)c_{n-1}(x):$$

Es ist das Hauptziel des Verf., allgemein für die Summen $\sigma_n(f; x)$ die den „Lebesgueschen Konstanten“ und den „Approximationskonstanten“ entsprechenden Größen zu ermitteln. Diese Größen, die mit $\sigma_n, \bar{\sigma}_n$ bzw. mit $\varrho_n^\alpha, \bar{\varrho}_n^\alpha$ ($0 < \alpha < 1$); $\varrho_n^{(r)}, \bar{\varrho}_n^{(r)}$ ($r = 1, 2, \dots$); $\varrho_n^{(r)\alpha}, \bar{\varrho}_n^{(r)\alpha}$ ($r = 1, 2, \dots; 0 < \alpha < 1$) bezeichnet werden, sind wie folgt erklärt: σ_n ist die obere Grenze von $\sigma_n(f) = \max_x |\sigma_n(f; x)|$, wenn $f(x)$ alle mit 2π periodischen,

summierbaren Funktionen durchläuft, für die $|f(x)| \leq 1$ gilt. $\varrho_n^\alpha, \varrho_n^{(r)}, \varrho_n^{(r)\alpha}$ sind die oberen Grenzen von $\varrho_n(f) = \max_x |f(x) - \sigma_n(f; x)|$, wenn $f(x)$ alle mit 2π periodischen, stetigen Funktionen durchläuft, für die $|f(x+h) - f(x)| \leq |h|^\alpha$ bzw. $|f^{(r)}(x)| \leq 1$ bzw. $|f^{(r)}(x+h) - f^{(r)}(x)| \leq |h|^\alpha$ gilt. [Soweit von der Ableitung $f^{(r)}(x)$ gesprochen wird, soll diese fast überall existieren und $f(x)$ das r -fach iterierte Integral von $f^{(r)}(x)$ darstellen.] Die Größen σ_n und $\bar{\varrho}_n^\alpha, \bar{\varrho}_n^{(r)}, \bar{\varrho}_n^{(r)\alpha}$ ergeben sich aus den vorangehenden, wenn $\sigma_n(f; x)$ durch das konjugierte trigonometrische Polynom $\sigma_n(f; x)$ und $f(x)$ durch die konjugierte Funktion $\bar{f}(x)$ ersetzt wird. — Unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über die summatorische Funktion $\varphi(u)$ werden durch Heranziehung neuer, an sich interessanter Sätze über Fourierintegrale die in Rede stehenden Größen abgeschätzt. Von den zahlreichen Ergebnissen werde als Beispiel der folgende Satz über die den Lebesgueschen Konstanten entsprechenden Größen σ_n angeführt: Die Funktion $\varphi(u)$ sei im abgeschlossenen Intervall $0 \leq u \leq 1$ absolut stetig. Ihre Ableitung $\varphi'(u)$ sei, von höchstens endlich vielen Ausnahmepunkten $0, a_1, \dots, a_p, 1$ abgesehen, in der Umgebung jeder Stelle des Intervalls schwankungsbeschränkt. In der Umgebung der Ausnahmepunkte darf die totale Variation von

$\varphi'(u)$ unendlich werden, es sollen jedoch die Integrale

$$\int_0^+ u |d\varphi'(u)|, \left(\int_0^{a_i-0} + \int_{a_i+0}^+ \right) |u - a_i| \log \frac{1}{|u - a_i|} |d\varphi'(u)|, \int_0^{1-0} (1-u) \log \frac{1}{1-u} |d\varphi'(u)|$$

konvergieren. Unter diesen Voraussetzungen ist die Folge (σ_n) beschränkt. Ist insbesondere 0 bzw. 1 der einzige Ausnahmepunkt für $\varphi'(u)$, so gilt die Abschätzung

$$\sigma_n \leq \int_0^{1-0} u |d\varphi'(u)| + |\varphi'(1-0)|$$

bzw.

$$\sigma_n \leq |\varphi'(+0)| + \frac{2}{\pi} \int_0^{1-0} (1-u) \left(\log \frac{1+u}{1-u} + 2 \right) |d\varphi'(u)|.$$

Speziell für eine monoton abnehmende und konvexe Funktion $\varphi(u)$ gilt $\sigma_n = 1$. — Verf. weist noch darauf hin, daß sich seinen Ergebnissen u. a. für $\varphi(u) = 1$ in $0 \leq u < 1$ (Teilsommen), $\varphi(u) = 1 - u$ (Fejérsche Mittel) und $\varphi(u) = (1 - u^\beta)^\delta$ ($\beta, \delta > 0$; Rieszsche Mittel für $\beta = 1$) eine Reihe bekannter Abschätzungen entnehmen lassen. Er bemerkt ferner, daß ihre Verallgemeinerung auf fastperiodische Funktionen und auf Funktionen, die durch trigonometrische Integrale dargestellt werden, möglich ist.

Friedrich Lösch (Stuttgart).

Mohanty, R.: A criterion for the absolute convergence of a Fourier series. Proc. London math. Soc., II. S. 51, 186—196 (1949).

Soit $0 \leq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots$, $\lambda_n \rightarrow \infty$ et supposons que $(1) \sum_1^\infty a_n$ est une série donnée. Posons $A_\lambda^r(\omega) = \sum_{\lambda_n \leq \omega} a_n (\omega - \lambda_n)^r$, $\omega > 0$, $r \geq 0$. La série (1) est dite sommable (R, λ, r) avec la somme s (G. H. Hardy and M. Riesz, The general theory of Dirichlet's series, Cambridge, 1915), si $\omega^{-r} A_\lambda^r(\omega) \rightarrow s$ pour $\omega \rightarrow \infty$. La série (1) est dite absolument sommable $[R, \lambda, r]$ [N. Obrechhoff, Math. Z. 30, 375—381 (1929)], si $\omega^{-r} A_\lambda^r(\omega)$ est de variation bornée dans (A, ∞) , $A > 0$. L'A. démontre des théorèmes nouveaux pour la convergence absolue de la série de Fourier

$\varphi(t) \sim \sum_1^\infty a_n \cos nt$ d'une fonction pair intégrable et périodique de période 2π ,

dont le terme constant est zéro. Cette simplification ne diminue pas la généralité des considérations. Voilà les résultats obtenus. A. 1. Soit $\varphi(t) \log(k/t)$ ($k \geq e^2 \pi$) de variation bornée dans $(0, \pi)$. 2. La suite $\{n^\delta a_n\}$ ($0 < \delta < 1$) est de variation bornée (une suite $\{u_n\}$ est dite de variation bornée si la série $\sum |u_n - u_{n-1}|$ converge).

Alors la série $\sum_1^\infty |a_n|$ est convergente. B. Si $\varphi(t) \log(k/t)$ ($k \geq e^2 \pi$) est de variation

bornée dans $(0, \pi)$ la série $\sum_1^\infty a_n$ est sommable $[R, e^{n^\alpha}, 1]$ ($0 < \alpha < 1$). C. 1. Si la

suite $\left\{ \frac{a_n \lambda_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \right\}$ est de variation bornée, 2. la suite $\left\{ \frac{\lambda_n}{\lambda_{n+1}} \right\}$ est de variation bornée,

3. la série $\sum_1^\infty a_n$ est sommable $[R, \lambda, 1]$, alors cette série est absolument convergente.

C'. Si la suite $\{n^{1-\alpha} a_n\}$ est variation bornée et la série $\sum_1^\infty a_n$ est sommable $[R, e^{n^\alpha}, 1]$

($0 < \alpha < 1$), alors cette série est absolument convergente. N. Obrechhoff.

Timan, A. F.: Über einige Summationsmethoden der Fourierschen Reihen. Izvestija Akad. Nauk SSSR, Ser. mat. 14, 85—94 (1950) [Russisch].

Es sei $f(x)$ eine nach 2π periodische stetige Funktion, und $S_n(f, x)$ bedeute die n -te Partialsumme ihrer Fourierschen Reihe. Verf. betrachtet die Polynome

$$\omega_n(\alpha_n; f, x) = \frac{1}{2} [S_n(f, x) + S_n(f, x + \alpha_n)],$$

wo α_n eine gegebene Zahlenfolge mit $|\alpha_n| \leq \pi$ bedeutet. Nach S. Bernstein und W. Rogosinski streben diese Polynome im Falle $\alpha_n = \frac{2k\pi}{2n+1}$ (k eine feste ungerade Zahl) gleichmäßig gegen $f(x)$. In Fortsetzung seiner früheren Arbeiten [dies. Zbl. 29, 26, sowie Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 61, 989—992 (1948)] beweist Verf. den folgenden Satz: Damit $\omega_n(\alpha_n; f, x)$ für jede stetige Funktion $f(x)$ gleichmäßig gegen $f(x)$ strebt (für $n \rightarrow \infty$), ist hinreichend, aber auch notwendig, daß $\alpha_n = \frac{2k(n)\pi}{2n+1} + O\left(\frac{1}{n \log n}\right)$ sei, wo $k(n)$ eine Funktion von n ist, deren Wertebereich aus endlich vielen ungeraden ganzen Zahlen besteht. — Ein analoger Satz gilt auch für Funktionen mehrerer Veränderlichen. — Auch die trigonometrischen Polynome $S_n^{(n)}(f, x)$, die die Funktion $f(x)$ in den äquidistanten Punkten $\frac{2v\pi}{2n+1}$ interpolieren, werden von demselben Gesichtspunkte aus untersucht; insbesondere wird die Norm der linearen Transformation

$$f(x) \rightarrow \tilde{\omega}_n(\alpha_n; f, x) = \frac{1}{2} [S_n^{(n)}(f, x) + S_n^{(n)}(f, x + \alpha_n)]$$

asymptotisch bestimmt.

Béla Sz.-Nagy (Szeged).

Zygmund, A.: On the summability of multiple Fourier series. Amer. J. Math. 69, 836—850 (1947).

Let $f(x, y) \in L$ be a function periodic in x and y with periods 2π and let $\sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} c_{mn} e^{i(mx+ny)}$ be the Fourier series of $f(x, y)$. Denote $\sigma_{mn}(x, y)$ the first arithmetic means, i. e.

$$\sigma_{mn}(x, y) = \sum_{\mu, \nu=-m, -n}^{m, n} \left(1 - \frac{|\mu|}{m+1}\right) \left(1 - \frac{|\nu|}{n+1}\right) c_{\mu\nu} e^{i(\mu x + \nu y)}.$$

Finally to define Abel means let $f_{r\varrho}(x, y) = \sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} c_{mn} e^{i(mx+ny)} \cdot r^{|m|} \cdot \varrho^{|n|}$, where $|r| < 1$ and $|\varrho| < 1$. The author proves the following theorems: 1. Let $m(t)$ and $n(t)$ ($0 \leq t < \infty$) be any integer valued functions tending to infinity with t . If $\lambda \geq 1$ and if $m \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$ in such a way that $\lambda^{-1} m(t) \leq m \leq \lambda m(t)$ and $\lambda^{-1} n(t) \leq n \leq \lambda n(t)$, then $\sigma_{mn}(x, y) \rightarrow f(x, y)$ almost everywhere. — 2. Let $0 < \Phi(u) \leq 1$ and $0 < \psi(u) \leq 1$ ($0 < u \leq 1$) be non-decreasing functions tending to 0 with u . Suppose that the points $r e^{i\xi} \rightarrow e^{ix}$ and $\varrho e^{i\eta} \rightarrow e^{iy}$ along any non-tangential paths and in such a way that $\lambda^{-1} \Phi(u) \leq 1 - r \leq \lambda \Phi(u)$ and $\lambda^{-1} \psi(u) \leq 1 - \varrho \leq \lambda \psi(u)$. Then $f_{r\varrho}(\xi, \eta) \rightarrow f(x, y)$ at almost every point (x, y) . — These theorems extend and complete results of J. Marcinkiewicz and A. Zygmund for the case $m(t) = n(t) = [t]$, $\Phi(u) = \psi(u) = u$ respectively [Fundam. Math., Warszawa 32, 122—132 (1939); this Zbl. 22, 18]. It follows from a theorem of S. Saks that σ_{mn} can diverge everywhere if we do not restrict how m and n increase [Fundam. Math., Warszawa 22, 257—261 (1934); this Zbl. 9, 106; see also H. Busemann and W. Feller, Fundam. Math., Warszawa 22, 226—256 (1934); this Zbl. 9, 106]. It must be noted that the condition $f(x, y) \log^+ |f(x, y)| \in L$ is necessary and sufficient that $\sigma_{mn} \rightarrow f$ almost everywhere as $m, n \rightarrow \infty$ independently of each other [B. Jessen, J. Marcinkiewicz and A. Zygmund, Fundam. Math., Warszawa 25, 217—234 (1935); this Zbl. 12, 59]. — The proof of 1. and 2. is the refinement of the earlier proof in the case $m(t) = n(t) = [t]$, $\Phi(u) = \psi(u) = u$. The crux of the problem concerning the general case is met by extending the covering lemma, used also in the previous paper. The second half of the paper contains the extensions of 1. and 2. to the Fourier-Stieltjes series and some additional results.

Gál (Paris).

Cheng, Min-Teh: Riesz summation of multiple Fourier series by spherical means. *Ann. Math.*, Princeton, II. S. **50**, 356—384 (1949).

The au. proves a series of theorems on the summation of multiple Fourier series and integrals by spherical means, introduced by Bochner [*Trans. Amer. math. Soc.* **40**, 175—207 (1936); this Zbl. **15**, 157]. As examples we quote: (1) Let $f_x(u)$ denote the mean of the function $f(x)$, $x = (x_1, \dots, x_k)$, of k variables over the sphere with center x and radius $u > 0$. Then, if

$$\int_0^t (f_x(u) - s) u^{k-1} du = o\left(t^k / \log \frac{1}{t}\right)$$

for $t \rightarrow 0+$, the spheric multiple Fourier series of f is summable at x by Riesz means $R(n, \alpha_0 + 1)$; where $\alpha_0 = (k-1)/2$, (2) If $\int_0^t |f_x(u) - s| u^{k-1} du = o(t^k)$

(the au. has a slightly more general condition), the spherical multiple Fourier series of f is summable at x by Bosanquet-Linfoot means of order (α_0, β) , $\beta > 1$ [Bosanquet-Linfoot, *J. London math. Soc.* **6**, 117—126 (1931); this Zbl. **1**, 393]. These latter means extend the Riesz means into a logarithmic scale. *Lorentz*.

* **Davydov, N. A.:** Konvergenz von trigonometrischen Lückenreihen. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. **65**, 9—12 (1949) [Russisch].

Verf. beweist einen Lückensatz Tauberscher Art für das Abelsche Limitierungsverfahren, der sich von dem „high indices theorem“ von Hardy und Littlewood darin unterscheidet, daß eine schwerwiegende Einschränkung $a_n \rightarrow 0$ hinzugenommen, dafür jedoch Annäherung innerhalb eines Winkelraumes statt längs eines Radius betrachtet wird. Daraus werden in üblicher Weise Sätze über lakunäre Fouriersche Reihen abgeleitet. *G. G. Lorentz (Toronto)*.

Funktionentheorie:

Andersson, Bengt: On equivalent analytic functions. *Ark. Mat.*, Stockholm **1**, 77—92 (1949).

Soit \mathfrak{R} la classe des fonctions analytiques dans $|z| \leq R$. Deux fonctions $f(z)$ et $g(z)$ de \mathfrak{R} sont dites équivalentes si $g(z) = e^{i\beta} f(z e^{i\alpha})$ ou si $g(z) = e^{i\beta} \overline{f(\bar{z} e^{i\alpha})}$, α et β étant des constantes réelles. A $f(z)$ appartenant à \mathfrak{R} on associe: sa M -fonction $\Phi_f(r, a) = \text{mes. de l'ens. des } \varphi \text{ (} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{) tels que } |f(r e^{i\varphi})| \leq a$; les valeurs moyennes

$$M_p(f, r) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r e^{i\varphi})|^p d\varphi \right]^{1/p}.$$

L'A. établit successivement les propriétés suivantes pour deux fonctions $f(z)$ et $g(z)$ de \mathfrak{R} : 1. Si $\Phi_f(r, a) = \Phi_g(r, a)$ dans un intervalle $0 < r \leq r_1$, f et g sont équivalentes; 2. Si, pour $r = r_0 \leq R$ et $p = p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ avec $\lim |p_n| = \infty$ on a $M_{p_n}(f, r) = M_{p_n}(g, r)$, alors cette relation est vérifiée pour $r = r_0$, p quelconque et $\Phi_f(r_0, a) = \Phi_g(r_0, a)$; 3. Si $\Phi_f(r, a) = \Phi_g(r, a)$ pour une infinité de valeurs de $r \leq R$, f et g sont équivalentes. *Dufresnoy (Bordeaux)*.

Germay, R.-H.-J.: Sur une proposition de la théorie générale des fonctions analytiques. *Bull. Soc. Sci. Liège* **17**, 62—65 (1947).

Formation d'une fonction analytique uniforme ayant à distance finie une suite donnée de points singuliers isolés (essentiels ou polaires) de parties principales données, cette fonction et un nombre fini donné de ses dérivées prenant des valeurs données sur une suite donnée de points du plan, la suite de ces points, ainsi que la suite des points singuliers ayant comme unique point d'accumulation le point à l'infini. Application du théorème de Mittag-Leffler, et du théorème de Weierstrass sur les facteurs primaires. *Calugareanu (Cluj)*.

Germa y, R.-H.-J.: Sur une application d'un théorème de E. Picard relatif aux produits indéfinis de facteurs primaires. Bull. Soc. Sci. Liège 17, 138—143 (1948).

Par des méthodes analogues à celles utilisées dans sa note précédente (v. le rapport précéd.), l'A. réussit à former une fonction analytique uniforme dans un cercle ayant à son intérieur une suite donnée de points singuliers isolés de parties principales données, cette suite de points n'ayant pas de point d'accumulation intérieur au cercle. En utilisant un travail antérieur [Ann. Soc. sci. Bruxelles 60, 190 (1946)] l'A. en déduit la possibilité de former une fonction uniforme dans le cercle telle que dans chaque point d'une suite donnée analogue, la fonction et un nombre fini donné de ses dérivées prennent des valeurs données. *Calugareanu (Cluj).*

Germa y, R.-H.-J.: Extension d'un théorème d'E. Picard sur les produits indéfinis de facteurs primaires. Bull. Soc. Sci. Liège 17, 180—185 (1948).

Les méthodes utilisées dans ses précédentes notes (v. les rapport précéd.) permettent à l'A. la généralisation suivante: On peut construire une fonction uniforme dans une couronne circulaire telle que dans chaque point d'une suite donnée, sans point d'accumulation intérieur à la couronne mais dont les points s'accumulent au voisinage de chaque cercle frontière, la fonction et un nombre donné de ses dérivées prennent des valeurs données. *Calugareanu (Cluj).*

Germa y, R.-H.-J.: Un exemple de produit indéfini de facteurs primaires dont les zéros sont les racines d'équations non résolues. Bull. Soc. Sci. Liège 17, 224—229 (1948).

Par des méthodes déjà employées dans ses notes antérieures, l'A. donne l'intéressante application qui suit: On peut former une fonction holomorphe dans un cercle, admettant comme zéros simples les racines d'une suite infinie d'équations (non résolues), racines intérieures à ce cercle. L'A. traite complètement le cas des équations $ze^{\lambda_n z} = 1$, $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n > \dots$ pour l'intérieur du cercle-unité.

Calugareanu (Cluj).

Germa y, R.-H.-J.: Un exemple de produit indéfini de facteurs primaires dont les zéros sont les racines d'équations non résolues. Bull. Soc. Sci. Liège 17, 294—296 (1948).

Même question pour le système plus général $ze^{\lambda_n - i\theta_n} = 1$ (v. le rapport précéd.).

Calugareanu (Cluj).

Germa y, R.-H.-J.: Remarque sur une application du théorème de Rouché. Bull. Soc. Sci. Liège 17, 303—307 (1948).

Étude détaillée de la distribution des racines de $z^n e^{\lambda z} = 1$, $\lambda > 1$, n entier > 1 , dans le cercle-unité.

Calugareanu (Cluj).

Herzog, Fritz and George Piranian: Sets of convergence of Taylor series. I. Duke math. J. 16, 529—534 (1949).

Es sei C die aus den Punkten des Einheitskreises $|z| = 1$ der komplexen z -Ebene bestehende Punktmenge, und es werde gesagt, die Menge M besitze die Eigenschaft (1), wenn M Untermenge von C ist, und wenn es mindestens eine Potenzreihe (2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ vom Konvergenzradius 1 gibt, welche überall auf M konvergiert, dagegen überall auf $C - M$ divergiert. Da die Menge der Untermengen von C eine größere Mächtigkeit besitzt als die Menge der Reihen (2), kann bekanntlich nicht jede Untermenge von C die Eigenschaft (1) besitzen. Die Verff. behandeln nun die interessante Frage nach Bedingungen dafür, daß eine Menge M die Eigenschaft (1) besitzt. — Nach S. Mazurkiewicz [Fundam. Math., Warszawa 3, 52—58 (1922)] besitzt eine Untermenge M von C sicher dann die Eigenschaft (1), wenn sie abgeschlossen ist. Das Hauptresultat der Verff. besteht in einer Verallgemeinerung dieser Aussage, nämlich dem Satz 1: Die Untermenge M von C besitzt sicher dann die Eigenschaft (1), wenn M vom Typus F_σ ist, d. h. wenn M die Vereinigungs-

menge von abzählbar vielen abgeschlossenen Mengen auf C ist. Beim Beweis ließen sich die Verff. anregen durch das von N. Lusin [Rend. Circ. mat. Palermo 32, 386—390 (1911)] gegebene Beispiel einer überall auf C divergierenden Reihe (2) mit $a_n \rightarrow 0$. Der Beweis des Satzes 1 ergibt noch den Satz 2: Ist die Untermenge M von C abgeschlossen, so gibt es eine Reihe (2), welche auf M gleichmäßig konvergiert, dagegen auf $C - M$ divergiert. Diese Aussage ist in einem gewissen Sinn die beste, die sich machen läßt. Es gilt nämlich der Satz 3: Ist M eine Untermenge von C , zu der es eine auf M gleichmäßig konvergiende, dagegen auf $C - M$ divergierende Reihe (2) gibt, so ist M abgeschlossen. Der Vollständigkeit halber wird noch der folgende unschwer zu beweisende Satz 4 angegeben: Besitzt M die Eigenschaft (1), so ist M vom Typus $F_{\sigma\delta}$, d. h. es ist M der Durchschnitt von abzählbar vielen Mengen vom Typus F_σ . — Die Untersuchung des „Niemandeslandes“ zwischen den Sätzen 1 und 4 in einer weiteren Arbeit wird angekündigt. In ihr soll z. B. gezeigt werden, daß der Satz 1 nicht umkehrbar ist, d. h. daß nicht jede Menge M der Eigenschaft (1) vom Typus F_σ ist. Meyer-König (Stuttgart).

Ghabbour, M. N.: On convergence of the product of basic sets of polynomials. Amer. J. Math. 69, 583—591 (1947).

Eine Polynomfolge $\{p_n(z)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) (1) heißt basisch, wenn sich jedes Polynom in \mathbb{C} eindeutig als endliche Linearkombination der $p_n(z)$ mit konstanten Koeffizienten darstellen läßt. Man nennt die Folge (1) einfach, wenn $p_n(z)$ den Grad n hat. Ist $z^n = \sum_i \pi_{ni} p_i(z)$ (2)

und gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{N_n} = 1$, wobei N_n die Anzahl der nichtverschwindenden Koeffizienten π_{ni} in (2) bedeutet, so wird die Folge (1) als eine Cannonsche Folge bezeichnet. D_n soll der Grad desjenigen der in (2) auftretenden Polynome $p_i(z)$ sein, welches den höchsten Grad hat. Der Folge (1) wird auf diese Weise die Folge $\{D_n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) (3) nichtnegativer ganzer Zahlen zugeordnet. Für jede in einer Umgebung von $z = 0$ reguläre Funktion $f(z)$ gibt es eine basische Reihe $\sum_n \Pi_n f^{(n)}(z) p_n(z)$ (4), worin die Operatorenfolge $\{\Pi_n\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) durch

$\Pi_n = \pi_{0n} + \sum_i \frac{\pi_{in}}{i!} \frac{d^i}{dz^i}$ definiert ist. Die basische Polynomfolge (1) heißt in $|z| \leq R$ effektivvoll,

wenn für jede in $|z| \leq R$ reguläre Funktion $f(z)$ die zugehörige Basisreihe (4) in $|z| \leq R$ gleichmäßig gegen $f(z)$ konvergiert. Es sei $p_n(z) = \sum_i p_{ni} z^i$. Die Matrix $P = (p_{ni})$ heißt die Koeffi-

zientenmatrix von (1). Sind P und Q die Koeffizientenmatrizen zweier basischer Polynomfolgen $\{p_n(z)\}$ und $\{q_n(z)\}$, so hat Whittaker gezeigt, daß die Matrix PQ Koeffizientenmatrix einer basischen Polynomfolge $\{u_n(z)\}$, $u_n(z) = \sum_i p_{ni} q_i(z)$ ist. $\{u_n(z)\} = \{p_n(z)\} \{q_n(z)\}$ heißt das

Produkt der beiden Polynomfolgen $\{p_n(z)\}$ und $\{q_n(z)\}$ in der angegebenen Reihenfolge. Man zeigt leicht, daß $q_n(z) = \sum_i \pi_{ni} u_i(z)$ (5) gilt. Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit dem von

Whittaker gestellten Problem, unter welchen Voraussetzungen über $\{p_n(z)\}$ und $\{q_n(z)\}$ ihr Produkt $\{u_n(z)\}$ effektivvoll ist. Verf. erhält folgende Ergebnisse: Satz 1. Von den beiden basischen Polynomfolgen $\{p_n(z)\}$ und $\{q_n(z)\}$ soll $\{p_n(z)\}$ eine Cannonsche Folge und $\{q_n(z)\}$ in $|z| \leq R$ effektivvoll sein. Außerdem habe für die $\{q_n(z)\}$ zugeordnete Folge (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n/n$

einen endlichen Wert. Dann ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung für das Effektivvollsein des Produktes $\{u_n(z)\} = \{p_n(z)\} \{q_n(z)\}$ in $|z| \leq R$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\Psi_n(R)/B_n(R)\}^{1/n} = 1$,

wenn $\Psi_n(R) = \sum_i |\pi_{ni}| M_i(R)$ (siehe (2)), $M_i(R) = \max_{|z| \leq R} |u_i(z)|$ und $B_n(z) = \max_{|z| \leq R} |q_n(z)|$ ist.

Der folgende Satz macht eine Aussage über den größtmöglichen Bereich, in welchem sich die Produktfolge $\{u_n(z)\}$ effektivvoll verhält. Satz 2. $\{p_n(z)\}$ sei eine Cannonsche Folge, für welche $\delta(aR)$ stetig, wenn $\delta(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \{\delta_n(a)\}^{1/n}$, $\delta_n(a) = \sum_i |\pi_{ni}| A_i(a)$ (siehe (2)) und

$A_i(a) = \max_{|z| \leq a} |p_i(z)|$ ist. Für die in $|z| \leq R$ effektivvolle Polynomfolge $\{q_n(z)\}$ soll $\lim_{n \rightarrow \infty} D_n/n$

endlich und $\lim_{n \rightarrow \infty} \{B_n(R)/R^n\}^{1/n} = a < \infty$ (6) sein. Unter diesen Voraussetzungen verhält sich

die Produktfolge $\{u_n(z)\}$ dann und nur dann in $|z| \leq R$ effektivvoll, wenn $\{p_n(z)\}$ in $|z| \leq aR$ effektivvoll ist. — Aus Satz 2 werden Folgerungen für einige besonders wichtige Spezialfälle gezogen. Hierauf wird an einem Beispiel gezeigt, daß die beiden Folgen $\{p_n(z)\}$ und $\{q_n(z)\}$ in $|z| \leq R$ effektivvoll

sein können, ohne daß es für ihre Produktfolge $\{u_n(z)\}$ im nämlichen Bereiche der Fall zu sein braucht. Schließlich wird nachgewiesen, daß in Satz 2 die Voraussetzung (6) nicht durch die schwächere $0 < a = \lim_{n \rightarrow \infty} \{B_n(R)/R^n\}^{1/n} < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{B_n(R)/R^n\}^{1/n} = b \leq \infty$ ersetzt werden kann, ohne daß der Satz 2 seine Gültigkeit verliert.

Lammel (Tutzing).

Moppert, Karl-Felix: Über Relationen zwischen m - und p -Funktionen. Verh. naturforsch. Ges., Basel 60, 61—76 (1949).

Ist eine Funktion z . B. in $|z| < 1$ regulär und wird sie daselbst gleich 0 und 1 nur mit Vielfachheiten, die durch v_0 bzw. v_1 teilbar sind ($v_0, v_1 \geq 2$, ganz), so wird sie eine m -Funktion (mit den Indizes v_0, v_1) genannt. Ist speziell $v_0 = v_1 = \infty$, d. h. sind 0 und 1 Ausnahmewerte, so soll die Funktion eine p -Funktion heißen. — Das Hauptziel der vorliegenden Dissertation ist nun, alle diejenigen Polynome $G(p)$ und $H(p)$ zu bestimmen, für welche die Gleichung $m = G(p):H(p)$ in dem Sinne besteht, daß 1., wenn p eine willkürliche p -Funktion ist, sich m aus der Gleichung als eine m -Funktion mit gegebenen Indizes ergibt, und 2., wenn umgekehrt m eine m -Funktion mit diesen Indizes vertritt, die aus der Gleichung sich ergebenden Zweige von p notwendig p -Funktionen werden. Mit elementaren Hilfsmitteln leitet Verf. für G und H einige Bedingungen ab, welche sich als sowohl notwendig als hinreichend erweisen. Sie grenzen, wie unschwere Rechnungen an Hand geben, die Möglichkeiten beträchtlich ab, so daß von (v_0, v_1) bloß die 5 Kombinationen (3, 2), (4, 2), (3, 3), (2, ∞), (∞, ∞) nebst Vertauschungen vorkommen können. Zu jedem dieser Fälle berechnet Verf. auch alle möglichen Quotienten $G:H$. Im Falle (∞, ∞), wo ja m eine p -Funktion ist, erhält man die 6 zur Modulgruppe als Untergruppe gehörigen λ -Substitutionen. Einer der Ausdrücke $G:H$, nämlich

$$m = 4(p^2 - p + 1)^3 : [27p^2(1 - p)^2],$$

welcher für den Fall (3, 2) von Ostrowski aufgestellt ist, ist automorph in bezug auf diese Gruppe, während alle übrigen $G:H$ in bezug auf gewisse Substitutionen der Gruppe invariant sind, in bezug auf andere ineinander übergehen.

G. af Hällström (Åbo).

Martin, Yves: Sur une classe de séries de polynomes. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1195—1196 (1949).

Verf. gibt ohne Beweise einige Sätze über die Interpolationsreihen (1) $\sum_1^\infty a_n P_n(z)$, wo $P_n(z) \equiv \prod_1^n (1 - z/\lambda_i)$ und $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots, \lambda_n \rightarrow \infty$ für $n \rightarrow \infty$.

Wenn die Reihe (1) für $z = z_0 \neq \lambda_i$ konvergiert, so ist sie in jedem beschränkten Gebiet gleichmäßig konvergent, falls (2) $\sum_1^\infty 1/\lambda_n$ konvergiert. In dem Falle, wo (2)

divergiert, gibt Verf. mehrere Sätze, u. a. folgenden: Konvergiert (1) wieder für $z = z_0 \neq \lambda_i$, so konvergiert sie gleichmäßig für $z = z_0 + r e^{i\varphi}$, wo $0 \leq r \leq R$ ($R > 0$), $-\pi/2 + \eta \leq \varphi \leq \pi/2 - \eta$, $\eta > 0$. In den weiteren Sätzen handelt es sich um die analoge Grenzabszisse der absoluten Konvergenz und um die Bestimmung der beiden Grenzabszissen durch die Koeffizienten a_n .

V. Paatero.

Leont'ev, A. F.: Über eine Interpolationsaufgabe. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 66, 331—334 (1949) [Russisch].

L'A. démontre le théorème suivant: Soit $\{\lambda_n\}$ une suite de nombres positifs, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$ et telle que $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\lambda_n^\varrho} < \infty$ pour un $\varrho > 0$. Supposons qu'il existe une fonction $f(z)$, régulière dans un angle $|\arg z| < \mu, \mu > 0$, et qui y satisfait pour $|z|$ assez grand à la condition $|f(z)| < e^{c|z|^\varrho}$, c étant une constante, et aux égalités $f(\lambda_n) = (-1)^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). Alors pour chaque suite de nombres $\{a_n\}$ telle que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln |a_n|}{\lambda_n^\varrho} < \infty,$$

on peut trouver au moins une fonction entière $\omega(z)$ d'ordre $\leq \varrho$ et du type $< \infty$ telle que $\omega(\lambda_n) = a_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$). N. Obrechhoff (Sofia).

Valiron, Georges: Remarques sur les domaines d'univalence des fonctions entières d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$. Bull. Sci. math., II. S. 71, 25—32 (1947).

Es sei $w = g(z)$ eine ganze transzendente Funktion der Ordnung $< 1/2$. Dann gibt es eine unendliche Folge von Gebieten Δ_m und positiven Zahlen A_m mit folgenden Eigenschaften: Bei $m \rightarrow \infty$ gilt $A_m \rightarrow \infty$ und die Δ_m drängen dabei schließlich in jede noch so kleine Umgebung von $z = \infty$ ein. $w = g(z)$ erzeugt aus jedem Δ_m ein schlichtes Gebiet, das im Kreise $|w| < A_m$, aus dem ein passendes Sektorgebiet auszulassen ist, Platz hat. Der interessante Beweis stützt sich auf einen Satz von A. Denjoy (Übertragung des Rolleschen Satzes ins Komplexe) und auf ein Ergebnis von A. Wiman [Aussage über die Struktur der z -Gebiete, in denen $|g(z)| < M$ gilt]. Bei hinreichend regulärer Nullstellenverteilung können die Δ_m in Kreise eingeschlossen werden, die vom Nullpunkt unter einem Winkel $\alpha(m)$ erscheinen, wobei $\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha(m) = 0$ gilt. Wittich (Karlsruhe).

Blambert, Maurice: Sur une généralisation de la notion de type d'une fonction entière définie par une série de Dirichlet et ses applications. C. r. Acad. Sci., Paris 226, 338—340 (1949).

Eine ganze Funktion sei durch die Dirichletsche Reihe $f(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s}$, $s = \sigma + it$, definiert, welche für $\sigma > \sigma_0$ ($< \infty$) konvergiert. Die Zahl $\varrho = \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} \log_2 M(\sigma) / -\sigma$, wo $M(\sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} |f(\sigma + it)|$ für $-\infty \leq t \leq \infty$ ist, heißt die Ordnung von f in der Ebene. Ist $M(\sigma, t_0, a) = \overline{\lim} |f(\sigma + it)|$, $|t - t_0| < a$, so heißt $\varrho(t_0, a) = \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} [\log_2 M(\sigma, t_0, a) / -\sigma]$ die Ordnung von f im Streifen $|t - t_0| < a$. Ferner heißt $\tau = \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} [\log M(\sigma) / e^{-\sigma \varrho}]$ der Typus in der Ebene der

Funktion f von der Ordnung ϱ ($< \infty$) ebenda und $\tau(t_0, a) = \lim_{\sigma \rightarrow -\infty} [\log M(\sigma, t_0, a) / e^{-\sigma \varrho(t_0, a)}]$ der Typus im Streifen $|t - t_0| < a$ der Funktion f von der Ordnung $\varrho(t_0, a)$ in diesem Streifen. Verf. gibt ohne Beweise einige Sätze über gewisse Relationen zwischen den oben definierten Ordnungen und Typen und den singulären Punkten der Funktion, u. a. den folgenden: Ist $\sigma_0 < \infty$ und $f_\alpha(s) = \sum a_n e^{-\lambda_n s} / \Gamma(1 + \alpha \lambda_n)$ ($\alpha > 0$) im Streifen $|t - t_0| < a$ von der Ordnung $\varrho_\alpha(t_0, a) < 1/\alpha$, so ist $f(s)$ regulär in diesem Streifen. Wenn $f_\alpha(s)$ in diesem Streifen zum Typus $\tau_\alpha(t_0, a)$ der Ordnung $\varrho_\alpha = 1/\alpha$ gehört, so ist $f(s)$ regulär im Gebiet $|t - t_0| < a$, $\sigma > \alpha \log \tau_\alpha(t_0, a)$. V. Paatero.

Minakshisundaram, S.: A generalization of Epstein zeta functions. Canadian J. Math. 1, 320—326 (1949).

Weyl, Hermann: Supplementary note. Canadian J. Math. 1, 326—327 (1949).

Diese schöne und interessante Note verallgemeinert die Epsteinfunktionen durch die Reihen

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(x) \omega_n(y) / \lambda_n^2.$$

ω_n, λ_n bezeichnen Eigenfunktionen, Eigenwerte von $\Delta u + \lambda u = \sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \lambda u = 0$

mit den Randbedingungen I) $u(x) \equiv u(x_1, \dots, x_k) = 0$ auf B oder II) $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0$ auf B . B ist der reguläre Rand eines Gebietes D im k -dimensionalen euklidischen Raum (x_1, \dots, x_k) . Reihe (1) hat eine endliche Abszisse der absoluten Konvergenz und stellt eine ganze Funktion dar für $x \neq y$ in D . Sie hat die „trivialen“ Nullstellen $0, -1, -2, \dots$ für I, und $-1, -2, \dots$ für II. — Bezeichnet $N(I)$ die Anzahl der Eigenwerte $\leq I$, so ist $N(I) \sim C(k) I^{k/2}$, wie sich aus dem Ikeharaschen Satz (Tauberscher Art) ergibt. Die erste Behauptung folgt aus einem Lemma über

die zu I oder II gehörige Greensche Funktion der Aufgabe $\Delta u - \partial u / \partial t = 0$

$$G(x, y; t) = \frac{1}{(2\sqrt{\pi t})^k} \exp\left(-\frac{\sum (x_i - y_i)^2}{4}\right) - g(x, y; t) \quad (\lim_{t \rightarrow 0} G = 0).$$

Lemma: $l_y = \min(y, B)$. Für ein endliches t -Intervall gilt

$$|g(x, y; t)| < c t^{-k/2} \exp(-l_y^2/t).$$

— H. Weyl gibt in einer Zusatznote für den Fall I eine Vereinfachung des Beweises für diesen Satz und eine Verschärfung der Abschätzung. *Hoheisel* (Köln).

Nehari, Zeev: The elliptic modular function and a class of analytic functions first considered by Hurwitz. Amer. J. Math. 69, 70—86 (1947).

Zum Studium beschränkter und schlichter Abbildungen werden zunächst einige Hilfsmittel über quadratische Transformationen elliptischer Modulfunktionen bereit gestellt. Läßt dann die für $|z| < 1$ reguläre Funktion $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n z^n = w$ für $0 < |z| < 1$

die Werte 0, d aus, so daß ebendort $0 \neq w \neq d$, so bestehen die Größenschätzungen $|w| \leq \frac{1}{16} |d| e^{-\pi^2 / \ln |z|}$ und $|\alpha_n| \leq \frac{1}{16} |d| e^{2\pi\sqrt{n}}$ für $n = 1, 2, \dots$. Für nicht zu kleine Werte von $|d|$ gelingt schließlich eine Aussage über die Schlichtheit der Abbildung.

W. Maier (Jena).

Collingwood, E. F.: Une inégalité dans la théorie des fonctions méromorphes. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 709—711 (1948).

Verallgemeinerung eines Satzes von H. L. Selberg über die Schmiegungsfunktion $m(r, a)$ einer in $|z| < R \leq \infty$ meromorphen Funktion. Verf. betrachtet die z -Gebiete, die von den Niveaulinien $|w - a| = \sigma(r)$ erzeugt werden, $\sigma(r)$ konstant oder monoton $\rightarrow 0$ für $r \rightarrow R$; $p(r)$, $0 \leq p(r) < \infty$ für alle $r < R$, sei die Zahl der a -Stellen in diesen Gebieten. $m(r, a)$ wird durch diese Größen $\sigma(r)$ und $p(r)$ nach oben abgeschätzt.

Wittich (Karlsruhe).

Collingwood, E. F.: Inégalités relatives à la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe dans le cercle unité. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 813—815 (1948).

Anwendung der im vorsteh. Referat angedeuteten Abschätzungen für $m(r, a)$ auf die Defektverteilung einer in $|z| < 1$ meromorphen Funktion mit unbeschränkter Charakteristik $T(r)$. Es werden obere Schranken für $\delta(a) = \lim_{r \rightarrow \infty} m(r, a)/T(r)$ und

$$\Delta(a) = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} m(r, a)/T(r) \text{ hergeleitet.}$$

Wittich (Karlsruhe).

Myrberg, P. J.: Über die analytische Fortsetzung von beschränkten Funktionen. Ann. Acad. Sci. Fennicae, A I, Nr. 58, 7 S. (1949).

Es sei m eine abgeschlossene Menge innerer Punkte auf einer Riemannschen Fläche F ; (B) bedeute die Klasse der auf der Restfläche $F' = F - m$ absolut beschränkten harmonischen Funktionen. Die Punktmenge m ist dann und nur dann hebbbar in bezug auf (B) , wenn die Kapazität von m verschwindet. Im Anschluß an dieses Ergebnis wird die analoge Frage für absolut beschränkte analytische Funktionen, die auf einer Riemannschen Fläche erklärt sind, behandelt. Von der hyperelliptischen Fläche $y^2 = g(x)$ [$g(x)$ ganz mit unendlich vielen einfachen Nullstellen $x_n \rightarrow \infty$ bei $n \rightarrow \infty$] ausgehend, wird gezeigt, daß es auf nullberandeten Flächen von unendlichem Geschlecht hebbare Punktmengen gibt, die ein Kontinuum enthalten. Schließlich wird noch die Klasse (D) aller in $G' = G - m$ (G die volle z -Ebene, m eine abgeschlossene Punktmenge) regulär analytischen Funktionen $f(z)$ mit endlichem Dirichletintegral betrachtet. Von dieser Klasse (D) gilt: Wenn der äußere Inhalt von m positiv ist, kann m nicht in bezug auf (D) hebbbar sein.

Wittich (Karlsruhe).

Pfluger, Albert: La croissance des fonctions analytiques et uniformes sur une surface de Riemann ouverte. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 505—507 (1949).

Soit une surface de Riemann ouverte \mathfrak{F} engendrée par une suite de surfaces compactes emboîtées $F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots$. L'A. donne une borne inférieure de D_n/D_{n-1} où D_n est l'intégrale de Dirichlet $\iint_{F_n} \left| \frac{dw}{dz} \right|^2 dx dy$ d'une fonction $w(z)$ analytique et uniforme sur \mathfrak{F} . — Dans le cas où, la frontière de \mathfrak{F} étant de mesure harmonique positive, il existe sur \mathfrak{F} une fonction de Green g , on obtient un résultat analogue pour l'intégrale de Dirichlet $D(\varrho)$ étendue à $g \geq \varrho$; on en déduit une borne inférieure de $\max_{g=\varrho} |w|$.
Dufresnoy (Bordeaux).

Pfluger, Albert: Des théorèmes du type de Phragmén-Lindelöf. C. r. Acad. Sci., Paris, **229**, 542—543 (1949).

Soit, dans un domaine D dont la frontière Γ contient le point $z = \infty$, une fonction $w(z)$ analytique, uniforme, non bornée et de valeur absolue ≤ 1 sur Γ . En utilisant une méthode analogue à celle de la Note précédente, l'A. établit que, pour R assez grand,

$$[\log M(R)]^2 \geq c \int_0^R e^{\alpha(\varrho)} d \log \varrho \quad \text{avec} \quad \alpha(\varrho) = 2\pi \int \frac{\varrho d \log r}{\Phi(r)},$$

où $\Phi(r)$ est la mesure angulaire du plus grand des arcs de $|z| = r$ intérieurs à D .
Corollaires.
Dufresnoy (Bordeaux).

LeVan, Thiem: Un problème de type généralisé. C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 1270—1272 (1949).

Verf. nützt frühere Betrachtungen (dies. Zbl. **29**, 35) zum Typenproblem bei einfach zusammenhängenden offenen Riemannschen Flächen für das verallemeinerte Typenproblem aus. Bei symmetrischem Aufbau der Fläche folgt aus der Konvergenz einer von R. Nevanlinna eingeführten Reihe, daß die Fläche einen positiven Rand hat.
Wittich (Karlsruhe).

Mitchell, Josephine: Value distribution of a meromorphic function of two complex variables on non-analytic manifolds. Duke math. J. **15**, 567—591 (1948).

Verf. schließt sich an die Arbeiten von Stefan Bergman an, in denen er Funktionen von 2 komplexen Veränderlichen in Gebieten mit ausgezeichnete Randfläche untersucht [Math. Z. **39**, 76—94 und 605—608 (1935), Math. Ann., Berlin **104**, 611—636 (1931); dies. Zbl. **1**, 215, **9**, 262, **10**, 310]. Der Rand m^3 der untersuchten Gebiete M^4 soll aus 2 analytischen Hyperflächen bestehen, deren gemeinsame Punkte die ausgezeichnete Randfläche F^2 bilden. Vom Maximum M auf F^2 , der in \bar{M}^4 meromorphen Funktion $f(z_1, z_2)$ wird auf die Werteverteilung in $m^3 - F^2$ geschlossen. Insbesondere werden obere und untere Schranken für die Werte von $|f|$ auf den 2-dimensionalen Flächen $K^2(\alpha)$ gegeben, die in $m^3 - F^2$ verlaufen. In den weiteren Abschätzungen treten $\max_{F^2} |f|$, $\max_{K^2(\alpha)} |f|$ und die α -Stellen-Dichte von f auf $z_2 = \text{const.}$ auf.
Behnke (Münster/Westf.).

Bergman, Stefan: Functions of extended class in the theory of functions of several complex variables. Trans. Amer. math. Soc. **63**, 523—547 (1948).

Es wird versucht, das Prinzip des harmonischen Maßes von Funktionen einer komplexen Veränderlichen auf zwei Veränderliche auszudehnen. Hierzu werden einfache 4-dimensionale Gebiete M^4 ausgewählt, die durch endlich viele Stücke m^3 analytischer Hyperflächen berandet sind. Die Bestimmungsfläche M^2 des Gebietes M^4 wird von den 2-dimensionalen Schnittflächen je zweier der Hyperflächen m^3 gebildet. In M^4 werden die Realteile analytischer Funktionen von zwei komplexen Veränderlichen $z_1 = x_1 + i y_1, z_2 = x_2 + i y_2$ betrachtet, d. h. reelle Funktionen U , die den vier Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_1^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_2^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y_1 \partial y_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial y_2} - \frac{\partial^2 U}{\partial x_2 \partial y_1} = 0$$

genügen. Diese Funktionen werden *B*-harmonische Funktionen genannt. (In der Literatur ist auch die Bezeichnung „biharmonisch“ gebräuchlich.) Sei jetzt F eine reelle Funktion auf der Bestimmungsfläche M^2 . Dann bilden alle in M^4 *B*-harmonischen Funktionen, die auf M^2 überall größer oder gleich (bzw. kleiner oder gleich) F sind, eine normale Familie, und diese Familie hat in jedem Punkt Z von M^4 ein Minimum $u(Z; F)$ (bzw. ein Maximum $l(Z; F)$). Auf $m^3 = \sum_i m_i^3$ ist überall

$u(Z; F) = l(Z; F)$, und diese Werte auf m^3 werden als Randwerte von erweiterten Klassen von Funktionen im M^4 zugrunde gelegt. Zwei Arten solcher Klassen werden betrachtet. Die Klasse $\text{Eh}[Z; M^4; F]$ besteht aus allen in M^4 harmonischen Funktionen von vier reellen Veränderlichen, welche auf m^3 die Randwerte $u(Z; F) = l(Z; F)$ annehmen. Um zur Klasse $\text{En}[Z; M^4; F]$ zu gelangen, wird der Bereich M^4 durch eine zweiparametrische Schar zweidimensionaler analytischer Flächen einfach überdeckt. Zu $\text{En}[Z; M^4; F]$ gehören diejenigen reellen Funktionen in M^4 , die auf jeder analytischen Fläche als Funktionen des Real- und Imaginärteils des komplexen Parameters harmonisch sind und auf m^3 die Randwerte $u(Z; F) = l(Z; F)$ annehmen. Ist M_1^2 eine Teilmenge von M^2 und $F(M_1^2) = 1$, $F(M^2 - M_1^2) = 0$, so heißen die Funktionen $\text{Eh}[Z; M^4; M_1^2] = \text{Eh}[Z; M^4; F(M^2)]$ und $\text{En}[Z; M^4; M_1^2] = \text{En}[Z; M^4; F(M^2)]$ das *Eh*-harmonische und das *En*-harmonische Maß von M_1^2 . Mit diesen Hilfsmitteln wird bewiesen: Ist $g(z_1, z_2)$ eine in M^4 reguläre Funktion der zwei komplexen Veränderlichen z_1, z_2 und gilt $|g(z_1, z_2)| \leq a < 1$ auf M_1^2 und $|g(z_1, z_2)| \leq 1$ auf M^2 , so gilt überall in M^4 $\log |g(z_1, z_2)| \leq \log a \times \text{Eh}(Z; M^4; M_1^2)$ und $\log |g(z_1, z_2)| \leq \log a \times \text{En}(Z; M^4; M_1^2)$. *F. Sommer (Münster).*

Eichler, Martin M. E.: Analytic functions in three-dimensional Riemannian spaces. *Duke math. J.* 16, 339–349 (1949).

Eine im Gebiet G des Riemannschen Raumes R_n mit dem Fundamentaltensor $g^{\mu\nu}$ definierte komplexwertige Funktion $z = u + iv$ heiße analytisch, wenn sie in G der Differentialgleichung $g^{\mu\nu} \nabla_\mu z \nabla_\nu z = 0$ genügt; dabei bedeute ∇_μ den Operator der kovarianten Differentiation, und die $g^{\mu\nu}$ mögen reell-analytisch (im üblichen Sinne) von den Koordinaten abhängen. quivalent hiermit ist, daß die durch $z = u + iv$ bewirkte Abbildung von G in die Ebene S der komplexen Zahlen eine „konforme Projektion“ ist, d. h.: Jedes zu einem „Projektionsstrahl“ $z = \text{const.}$ orthogonale 2-dimensionale Flächenelement soll konform in S abgebildet werden. Für $n = 3$ wird folgendes bewiesen: 1. Damit ein Richtungsfeld in R_3 zu den Projektionsstrahlen einer analytischen Funktion z gehört, ist die Erfüllung gewisser, durch ein System linearer Differentialgleichungen gegebener Bedingungen notwendig und hinreichend. 2. Sei \square der Differentialoperator 2. Ordnung $g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu$. Dann ist die Menge aller analytischen Funktionen z bestimmt durch die Gesamtheit aller „kanonischen Darstellungen“ $\square = S_1 S_3 - S_2^2 + L$, wo die S_i ($i = 1, 2, 3$) und L Differentialoperatoren 1. Ordnung mit nicht notwendig reellen Koeffizienten bedeuten, derart, daß $S_1 S_2 - S_2 S_1 = a S_1 + b S_2$, $S_2 S_3 - S_3 S_2 = c S_2 + d S_3$ gilt mit geeigneten Skalaren a, b, c, d . Sämtliche kanonischen Darstellungen von \square können aus den Lösungen einer quasilinearen Differentialgleichung 1. Ordnung gewonnen werden. 3. Auf einer reell-analytischen Fläche F in R_3 sei ein von den Koordinaten reell-analytisch abhngendes Vektorfeld gegeben, dessen Vektoren nirgends orthogonal zu F sind. Dann existiert in einer Umgebung von F eine analytische Funktion z , deren Projektionsstrahlen auf F den dort gegebenen Vektoren parallel sind. Hieraus folgt insbesondere, daß auf F beliebig reell-analytische Kurven als Projektionsstrahlen analytischer Funktionen vorgegeben werden können. 4. Ist R_3 der 3-dimensionale euklidische Raum, so kann die Gesamtheit der konformen Projektionen mit Hilfe einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung in drei Variablen beschrieben werden. — Die in R_3 analytischen Funktionen werden sodann zur Aufstellung der Lösungen einer linearen partiellen Differentialgleichung 2. Ord-

nung vom elliptischen Typus in drei Variablen

$$(1) \quad g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi + h^\mu \nabla_\mu \Phi + k \Phi = 0$$

benutzt, wo h^μ einen beliebigen kontravarianten Vektor und k einen beliebigen Skalar bedeutet, die reell-analytisch von den Koordinaten abhängen. Sei $z = u + iv$ eine analytische Funktion in R_3 und w irgendeine reell-analytische, von u und v unabhängige Funktion. Werden u, v, w als Koordinaten eingeführt, so geht (1) nach Division durch einen Faktor über in

$$(2) \quad \Phi_{uu} + \Phi_{vv} + A \Phi_u + B \Phi_v + C \Phi = 0$$

mit $A = a_1 + a_2 \frac{\partial}{\partial w}$, $B = b_1 + b_2 \frac{\partial}{\partial w}$, $C = c_1 + c_2 \frac{\partial}{\partial w} + c_3 \frac{\partial^2}{\partial w^2}$. Nunmehr wird ein Integraloperator angegeben, der den analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen Lösungen von (2) zuordnet; es wird gezeigt, daß sich so alle Lösungen von (2) gewinnen lassen. Integraloperatoren dieser Art sind schon früher von Stef. Bergman (dies. Zbl. 29, 398) und Verf. (dies. Zbl. 30, 31) unabhängig voneinander zur Darstellung der Lösungen einer linearen partiellen Differentialgleichung 2. Ordnung vom elliptischen Typus in zwei Variablen benutzt worden.

Stein (Münster i. W.).

Esteban Carrasco, Luis: Lösung eines Problems über die aus einer polygenen Funktion abgeleitete Kreiskongruenz. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 9, 10—12 (1949) [Spanisch].

Es sei $w(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ eine polygene Funktion der komplexen Veränderlichen z im Bereich E der z -Ebene. Die Ableitung $\gamma = dw/dz$ ist für jeden Punkt von E durch den sogenannten Kasperschen Kreis in der γ -Ebene dargestellt. Diese Kreise bilden die abgeleitete Kreiskongruenz. Einer Kurve C in der z -Ebene entspricht eine einparametrische Schar F von Kreisen in der γ -Ebene. Verf. diskutiert zwei von De Cicco gestellte Probleme: 1. Zu gegebenem w die Kurven C zu finden, für die die Kreise von F die Krümmungskreise der Enveloppe von F sind. (Es ergibt sich ein System von $2 \cdot \infty^1$ Kurven.) — 2. Welche Bedingungen muß w erfüllen, so daß die Forderung von 1. für jedes C von E erfüllt ist? (w muß einem System von drei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in u und v genügen.)

Trost (Zürich).

Modulfunktionen. Fastperiodische Funktionen:

Walton, Jean B.: Theta series in the Gaussian field. Duke math. J. 16, 479—491 (1949).

Verf. untersucht die Modulformen $(1) f_r(\tau) = \sum_{\substack{\mu \in \mathbb{O} \\ \mu \subset \mathbb{O}}} \mu^r e^{\pi i \tau \mu \mu'} \quad (r \text{ ganz} > 0)$, wo \mathbb{O} den Bereich der ganzen Zahlen des Gaußschen Zahlkörpers angibt. Für $r = 1$ handelt es sich um einen Spezialfall der allgemeinen Heckschen Funktionen $\vartheta_1(\tau, \varrho, \alpha, Q \sqrt{D})$, die hier für $D = -4$, $\alpha = 0$ in Betracht kommen. Nach Ableitung der Transformationsgleichungen, die das Verhalten der zu (1) analogen Modulformen

$$\vartheta_r(\tau, \varrho, Q) = \sum_{\substack{\mu \in \mathbb{O} \\ \mu = \varrho(2Q)}} \mu^r e^{\pi i \mu \mu' \tau / 2Q}$$

bei Anwendung allgemeiner Modulsstitutionen beschreiben, wird gezeigt, wie sich die $\vartheta_r(\tau, \varrho, 1)$ aus Potenzprodukten der Jacobischen ϑ -Nullwerte $\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$ linear zusammensetzen lassen, und es werden diese Darstellungen für $f_r(\tau)$ ($r = 4, 8, 12, 16, 20, 24$) explizit angegeben. — Ref. bemerkt, daß alle Ergebnisse, abgesehen von der zuletzt genannten Darstellung, in den ganz allgemeinen Resultaten von B. Schoeneberg [Math. Ann., Berlin 116, 511—523 (1939); dies. Zbl. 20, 202] und E. Hecke [Danske Vid. Selsk., Math.-fys. Medd. 17, Nr. 12, 1—134 (1940); dies. Zbl. 24, 9] enthalten sind.

Petersson (Hamburg).

Dalzell, D. P.: On the theory of functions associated with a canonical Fuchsian group. Proc. London math. Soc., II. S. 51, 90—113 (1949).

Es sei Γ eine Grenzkreisgruppe vom Geschlecht $p > 1$ mit $|z| < 1$ als Grenzkreisinnerem, die von endlich vielen hyperbolischen Substitutionen erzeugt wird, also einen mit seinem Rand in $|z| < 1$ enthaltenen, von $4p$ hyperbolischen Strecken begrenzten Fundamentalbereich \mathfrak{F} mit dem Mittelpunkt $z = 0$ besitzt. Verf. konstruiert gewisse transzendente Funktionen, die den elliptischen Funktionen der Weierstraßschen Theorie entsprechen. In etwas abweichenden Bezeichnungen, die der in Deutschland entwickelten Theorie der automorphen Formen angepaßt sind und die eine etwas weitertragende Interpretation der Ergebnisse des Verf. gestatten, lassen sich diese folgendermaßen zusammenfassen (vgl. den Bericht des Ref., dies. Zbl. 30, 154): Ausgangspunkte sind eine metrische Normierung der p Integranden erster Gattung und die Existenz der multiplikativen Primform $H(z, a)$ zum Punkte $z = a$ von \mathfrak{F} . Die erste Konstruktion führt über Poincarésche Reihen zu einer Funktion $\wp(z, \zeta)$, die in z und ζ analytisch und symmetrisch ist, als Funktion von z eine automorphe Form von der Dimension -2 darstellt und in dieser Eigenschaft bei $z = \zeta$ den Hauptteil $(z - \zeta)^{-2}$ besitzt; in allen zu ζ nach Γ inäquivalenten Punkten ist $\wp(z, \zeta)$ regulär. Eine Normierungsvorschrift für $\wp(z, \zeta)$ läßt sich dahin deuten, daß $\wp(z, \zeta)$ zur Schar der Integranden erster Gattung orthogonal ist, und bestimmt $\wp(z, \zeta)$ in Verbindung mit den genannten anderen Eigenschaften eindeutig. Durch Integration nach dz entsteht aus $\wp(z, \zeta)$ ein Integral zweiter Gattung $Z(z, \zeta)$ und aus diesem durch erneute Integration und Erhebung in den Exponenten von e eine Primfunktion $\tilde{\omega}(z, \zeta)$ zum Punkte $z = \zeta$, die sich bei Substitutionen aus Γ wie eine automorphe Form der Dimension -1 mit nicht-konstanten Multiplikatoren verhält, also sicher keine automorphe Form ist, im übrigen aber das Verhalten einer Primform aufweist, in z und ζ analytisch ist und außerdem der Symmetrierelation $\tilde{\omega}(z, \zeta) = -\tilde{\omega}(\zeta, z)$ genügt. Von $\tilde{\omega}(z, \zeta)$ gelangt man zu der automorphen Primform $H(z, \zeta)$ durch einen bekannten Prozeß. — Zum Schluß werden mit Hilfe des Abelschen Theorems und des Jacobischen Umkehrtheorems Aussagen über additive Charaktere mit ganzzahligen Werten und zugehörige multiplikative automorphe Formen bewiesen.

Petersson (Hamburg).

Dalzell, D. P.: Algebraic relations between theta-Fuchsian functions. Proc. London math. Soc., II. S. 51, 114—131 (1949).

(Bezeichnungen aus dem vorangeh. Referat.) Wenn ein Integrand erster Gattung mit lauter einfachen Nullstellen gegeben ist, so lassen sich diese (soweit in \mathfrak{F} enthalten) in zwei Gruppen $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p-1}$ mit folgenden Eigenschaften zerlegen: Zu jedem α_j existiert eine automorphe Funktion $f_j(z)$, die in α_j einen Pol erster Ordnung hat, in den übrigen α_i regulär ist, und deren andere Pole in \mathfrak{F} höchstens noch in den β_k liegen können und sämtlich einfach sind. Das gleiche gilt bei Vertauschung der β mit den α , so daß β_k eine automorphe Funktion $g_k(z)$ von der analogen Beschaffenheit entspricht. Nun zeigt sich, daß $f_r(z)$ und $f_s(z)$ ($r \neq s$) dann und nur dann keinen gemeinsamen Pol haben, wenn sie durch eine lineare Transformation miteinander zusammenhängen. Dies gibt die methodische Begründung für die Ausnahmestellung der hyperelliptischen Gruppen Γ : Wenn alle $f_j(z)$ ($1 \leq j \leq p-1$) miteinander durch lineare Substitutionen verknüpft sind, so ist Γ hyperelliptisch. Liegt dieser Sonderfall nicht vor, so läßt sich, wie Verf. beweist, jede ganze automorphe Form von der Dimension -4 als bilineare Verbindung von Integranden erster Gattung darstellen. Ist dagegen Γ hyperelliptisch, so gilt dieser Satz zwar noch für $p = 2$, aber sicher nicht mehr für $p > 2$, in welchem Falle die genannten Bilinearverbindungen nur eine Linearschar vom Range $2p-1$ erfüllen, während der Rang der Vollschar von der Dimension -4 den Wert $3p-3$ hat. Bei nicht-hyperelliptischen Gruppen Γ gilt darüber hinaus allgemein, daß jede ganze automorphe Form einer Dimension $-2m \leq -4$ (m ganz) als homogenes

Polynom des Grades m in passenden p Integranden erster Gattung dargestellt werden kann. — Zum Schluß wird ein Beweis für die Darstellung der ganzen automorphen Formen dieser Dimensionen $-2m$ durch Poincarésche Reihen mitgeteilt. Der Beweis verwendet neben Poincaréschen Gedankengängen die bekannte Metrisierung der automorphen Formen in der Gestalt, die sie durch die Transformation von der oberen Halbebene in den Einheitskreis gewinnt.

Petersson (Hamburg).

Bohr, Harald: On almost periodic functions and the theory of groups. Amer. math. Monthly 56, 595—609 (1949).

Erläuterung der Fragestellung in der Theorie der fastperiodischen Funktionen. Auf Verständlichkeit für einen größeren Leserkreis ist besonderer Wert gelegt.

Maak (Hamburg).

Sunyer i Balaguer, Ferran: Une généralisation des fonctions presque périodiques. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 732—734 (1949).

Sunyer i Balaguer, Ferran: Une généralisation des fonctions presque-périodiques: fonctions presque-elliptiques. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 797—799 (1949).

Verf. nennt τ_ε eine Fastperiode von $f(x)$, wenn $|f(x + \tau), f(x)| < \varepsilon$ für alle x . Dabei ist $|z_1, z_2|$ der Abstand der komplexen Zahlen z_1, z_2 , wenn man sie (durch stereographische Projektion) als Punkte der Zahlenkugel deutet. Führt man nun wie sonst den Begriff „fastperiodisch“ ein, so brauchen fastperiodische Funktionen nicht mehr beschränkt zu sein. Es gelingt, die elliptischen Funktionen als spezielle doppelt-fastperiodische Funktionen zu deuten. Sätze über elliptische Funktionen werden verallgemeinert. Verf. hat nachträglich bemerkt, daß derartige Theorien schon vor etwa 20 Jahren geschaffen wurden, und es darf hinzugesetzt werden, daß ihr Erfolg nicht groß war.

Maak (Hamburg).

Gewöhnliche Differentialgleichungen:

• Blanc, Ch.: Les équations différentielles de la technique. Neuchâtel: Editions du Griffon 1947. 307 p., brosch. Fr. 29,50.

Das aus Vorlesungen an der Universität Lausanne entstandene Buch ist als Einführung in das Gebiet der Differentialgleichungen der Technik gedacht. Aus didaktischen Gründen werden fast ausschließlich vereinfachte Probleme aus Technik und Physik behandelt, zu denen lineare Differentialgleichungen gehören, die meist noch konstante Koeffizienten besitzen. Dadurch ist es dem Verf. möglich geworden, das umfangreiche Gebiet unter Berücksichtigung seiner neueren Entwicklung auf etwa 300 Seiten darzustellen. — Im ersten, von den gewöhnlichen Differentialgleichungen handelnden Teil des Buches werden zunächst die die freien Schwingungen beschreibenden homogenen Systeme von Differentialgleichungen betrachtet. Nach Erörterung der Stabilitätskriterien wird bei der Untersuchung der Eigenschwingungen eine Skizze der Matrizenrechnung eingeschaltet. Die Darstellung der die Ausgleichsvorgänge beschreibenden inhomogenen Systeme erfolgt unter Benutzung der Laplace-Transformation. Im Kapitel über Randwertaufgaben wird der Begriff der Greenschen Funktion eingeführt und die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach Eigenfunktionen besprochen. — Der zweite, von den partiellen Differentialgleichungen handelnde Teil beginnt mit der Differentialgleichung der schwingenden Saite und der Telegraphengleichung. Hier werden wieder nacheinander die homogenen und die inhomogenen Differentialgleichungen betrachtet, anschließend das Problem der Wellenausbreitung sowie der für die Anwendungen wichtige Fall der periodischen Störungsfunktion. Die folgenden Kapitel sind der Wärmeleitungsgleichung und den Differentialgleichungen $\Delta u = f$, $\Delta u = 0$ gewidmet. Bei der letzteren werden die Lösungen der verschiedenen Randwertaufgaben vorgeführt. — Im dritten Teil des Buches sind verschiedene mit den beiden ersten Teilen zusammenhängende Gebiete vereinigt. Einer Skizze der Variationsrechnung schließt sich eine Darstellung der Methoden zur Lösung von Randwertaufgaben mit Hilfe von Variationsprinzipien an. Den Schluß bilden Kapitel über elliptische Funktionen und Integrale sowie über Besselsche Funktionen. — Die Darstellung zeichnet sich durch Einfachheit und Klarheit aus. Von der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen wird nur das Notwendigste gebracht, um den an vielen Stellen eingestreuten Beispielen aus Mechanik und Physik einen möglichst breiten Platz einräumen zu können. Der Verf. hat sich bemüht, überall dort die Strenge zu wahren, wo sie den Problemen aus den Anwendungen von Nutzen ist; wo sie es nicht ist, hat er sich darauf beschränkt, auf die Lücken und die einschlägige Literatur hinzuweisen. Alles in allem, ein gut-

durchdachtes und modernes Lehrbuch, dessen Lektüre nicht nur jedem angehenden Physiker und Ingenieur empfohlen werden kann, sondern auch jedem Studierenden der Mathematik. *Quade (Hannover).*

Olsson, Herbert: On certain asymptotic solutions of Riccati's differential equation. Ark. Mat., Stockholm 1, 21—25 (1949).

Verf. weist die Möglichkeit nach, mit Hilfe des BWK-Verfahrens im Falle der Divergenz zu asymptotischen Lösungen zu kommen, gewissen Kritiken von R. Langer im Bull. Amer. math. Soc. 40, 545—582 (1934); dies. Zbl. 9, 397 belegend. — Es wird (1) $y'' - (\varrho^2 f^2(x) + g(x))y = 0$ (wo ϱ ein von x unabhängiger unbeschränkter reeller Parameter, $f(x)$ und $g(x)$ reell, f nicht verschwindend für $a \leq x \leq b$), durch die Substitution (2) $y = e \exp\left(\varrho \int_{a_1}^x u(x, \varrho) dx\right)$ in die Riccati-Gleichung (3) $\varrho u' + \varrho^2 u^2 - \varrho^2 f^2 - g = 0$ überführt und gezeigt, daß (3) im Falle der Konvergenz von $I_1 = \int_a^x f(x) dx$ asymptotische Lösungen der Form

$$u(x, \varrho) = \pm f(x) + \frac{u_1(x)}{\varrho} + \frac{u_2(x)}{\varrho^2} + \dots + \frac{u_n(x) + \varepsilon_n(x, \varrho)}{\varrho^n}$$

zuläßt, $\lim_{\varrho \rightarrow \infty} \varepsilon_n(x, \varrho) = 0$. Dabei ergeben sich die $u_\nu(x)$ aus der BWK-Rekursion

$$u_1 = \frac{u'_0}{u_0}, u_2 = -\frac{u'_1 + u_1^2 - g}{2u_0}, u_{\nu+1} = -\frac{1}{2u_0} \left(u'_\nu + \sum_{p=1}^{\nu} u_p u_{\nu+1-p} \right),$$

mit $u_0 = f(x)$ und $\nu \geq 2$. Bei Wahl von

$$u(x, \varrho) = \pm f(x) + \frac{u_1(x)}{\varrho} + \frac{u_2(x) + \varepsilon_2(x, \varrho)}{\varrho^2}$$

und Rückkehr zu (1) über (2) entstehen unter der Annahme der Konvergenz von $I_2 = \int_a^x u_2(x) dx$ asymptotische Lösung von (1) in einer von Langer gegebenen Form. *R. Ullrich (Kiel).*

Hartman, Philip and Aurel Wintner: On the classical existence theorem of linear differential equations. Amer. J. Math. 71, 859—864 (1949).
Nel sistema

$$(1) \quad dw_i/ds = \sum_{k=1}^n f_{i,k}(s) w_k \quad (i = 1, \dots, n),$$

i coefficienti $f_{i,k}(s)$, $s = \sigma + it$, siano continui nel semipiano $\sigma \geq 0$, olomorfi nel semipiano $\sigma > 0$, e quasi periodici (uniformemente rispetto a σ) nel semipiano $\sigma \geq 0$, e con la terminologia dell'A. uniformemente quasi-periodici. — Nell'ipotesi che i coefficienti $f_{i,k}(s)$ abbiano la rappresentazione di Fourier

$$(2) \quad f_{i,k}(s) \sim \sum_m a_m^{(i,k)} e^{-\lambda_m s} \quad (i, k = 1, \dots, n),$$

con $\lambda_m \geq \lambda_0 > 0$, gli Autori con procedimento di approssimazioni successive dimostrano: 1) se $w_1(s), \dots, w_n(s)$ è un sistema fondamentale di integrali di (1), ogni $w_l(s)$ è uniformemente quasi-periodica nel semipiano $\sigma \geq 0$; 2) fissato un sistema di costanti c_1, \dots, c_n esiste ed è univocamente determinato un sistema di integrali $w_1(s), \dots, w_n(s)$ tali che $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T w_l(\sigma + it) dt = c_l$ ($l = 1, \dots, n$); 3) ogni esponente di Fourier non nullo di $w_l(s)$ è una combinazione lineare a coefficienti interi positivi di un numero finito di esponenti λ_m degli sviluppi (2). *Sansone.*

Wintner, Aurel: On linear asymptotic equilibria. Amer. J. Math. 71, 853—858 (1949).

Se nel sistema

$$(1) \quad x'_i = \sum_{k=1}^n a_{i,k}(t) x_k \quad (i = 1, \dots, n)$$

le funzioni $a_{i,k}(t)$ sono continue per $0 \leq t < \infty$ e soddisfano le seguenti condizioni:

gli integrali $\int_s^\infty a_{i,k}(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_s^T a_{i,k}(t) dt$ sono convergenti;

$$(2) \quad \int_a^\infty \left| \int_s^\infty a_{i,k}(t) dt \right| ds < \infty; \quad (3) \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} |a_{i,k}(t)| < \infty;$$

allora qualunque sistema di integrali $x_1(t), \dots, x_n(t)$ di (1) è tale che esiste finito $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t)$, ed inoltre ad ogni sistema di costanti c_1, \dots, c_n corrisponde una soluzione

$x_1(t), \dots, x_n(t)$ tale che $\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t) = c_i$. — Il teorema resta valido se alle (2) e (3) si sostituiscono le condizioni

$$\int_a^\infty \left| \int_s^\infty a_{i,k}(t) dt \right|^p dt < \infty, \quad \int_a^\infty |a_{i,k}(t)|^q dt < \infty, \quad p > 1, \quad q = p/(p-1).$$

Giovanni Sansone (Firenze).

Wintner, Aurel: Asymptotic integrations of the adiabatic oscillator. Amer. J. Math. 69, 251—272 (1947).

$\varphi(t)$ sei eine reelle stetige Funktion der Klasse (L^0) [$\varphi(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow +\infty$ und $\int_0^\infty |\varphi(t)| dt < \infty$]; dann gibt es zu jeder Lösung $x(t) \neq 0$ von (1) $x'' + (\omega^2 + \varphi(t))x = 0$, $\omega > 0$, eindeutig zwei positive Integrationskonstanten a und α ($\leq 2\pi$); derart, daß

$$x(t) = a \cos \left(\alpha + \int_0^t \{\omega^2 + \varphi(s)\}^{\frac{1}{2}} ds \right) + \varepsilon(t),$$

wo $\varepsilon(t) \rightarrow 0$, $\varepsilon'(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. — Ist $\varphi(t)$ außerdem aus der Klasse (L^2) [$\int_0^\infty \varphi(t)^2 dt < \infty$], so kann dies Ergebnis zu

$$x(t) = a \cos \left(\alpha + \omega t + \frac{1}{2} \int_0^t \varphi(s) ds / \omega \right) + \varepsilon(t)$$

verschärft und vereinfacht werden. — Diese Verschärfung ist nicht richtig, wenn die zusätzliche (L^2) -Voraussetzung fehlt, oder auch, wenn man nur $\varphi(t) \rightarrow 0$, $\varphi(t)$

aus (L^2) fordert. Ja es kann sogar, wenn man $\int_0^\infty \varphi(t) dt < \infty$, $\int_0^\infty \varphi(t)^2 dt < \infty$,

$\varphi(t) \rightarrow 0$ vorausgesetzt (nicht $\int_0^\infty |\varphi(t)| dt < \infty$ und nicht $\int_0^\infty |d\varphi(t)| < \infty$), noch nicht beschränkte Lösungen von (1) geben. — Haupthilfssatz ist: Sind $f(t)$, $g(t)$ für große positive t definierte stetige (ev. komplexwertige) Funktionen, ist jede Lösung $x(t)$ von (2) $x'' + f(t)x = 0$ (mitsamt ihrer Ableitung) für $t \rightarrow \infty$ beschränkt und

$f(t) - g(t)$ aus der Klasse L^1 [$\int_0^\infty |f - g| dt < \infty$], so vermittelt $x(t) - y(t) \rightarrow 0$, ($x'(t) - y'(t) \rightarrow 0$) für $t \rightarrow \infty$ eine umkehrbar-eindeutige Zuordnung zwischen den Lösungen von (2) und (3) $y'' + g(t)y = 0$. — Hierfür werden noch Modifizierungen [(L^2)-Voraussetzungen] gegeben. Diese letzten Resultate, die einen Satz von Weyl [Math. Ann., Berlin 68, 222—269 (1910)] für den „Grenzkreisfall“ verallgemeinern, gab schon z. Teil R. Bellmann [Duke Math. J. 11, 513—516 (1944)].

F. W. Schäfke (Mainz).

Wintner, Aurel: Vortices and nodes. Amer. J. Math. 69, 815—824 (1947)

Seien a, b, c, d reelle Konstanten, $ad - bc \neq 0$, $f(x, y)$, $g(x, y)$ reelle stetige Funktionen in der Umgebung von $(0, 0)$ mit $f(x, y) = o(r)$, $g(x, y) = o(r)$ für $r \rightarrow 0$, wo $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, $r > 0$. Verf. untersucht, wie schon H. Poincaré für den analytischen Fall, Beziehungen zwischen den Lösungen des Systems (1) $x'(t) = ax + by + f(x, y)$, $y'(t) = cx + dy + g(x, y)$ und denen des trivialen linearen Systems (2) $x' = ax + by$, $y' = cx + dy$. Er nennt $(0, 0)$ „Anziehungspunkt“ (attractor) von (1), wenn jede Lösung $(x(t), y(t))$ nahe genug bei $(0, 0)$

gegen $(0, 0)$ konvergiert für $t \rightarrow +\infty$ (oder $t \rightarrow -\infty$). $(0, 0)$ ist dabei Knotenpunkt (node), wenn jede gegen $(0, 0)$ konvergente Lösung dort eine Tangente besitzt, speziell „eigentlicher“ Knotenpunkt (proper node), wenn dabei jede Tangentenrichtung wirklich auftritt. $(0, 0)$ ist dagegen Strudelpunkt (vortex), wenn für jede gegen $(0, 0)$ konvergente Lösung $|\theta(t)| \rightarrow \infty$ gilt. Es wird u. a. gezeigt: 1. Ist $(0, 0)$ Anziehungspunkt für (2), so auch für (1). [Die Umkehrung ist schon im analytischen Falle nicht richtig.] 2a. Ist $(0, 0)$ eigentlicher Knotenpunkt von (2), so möglicherweise Strudelpunkt von (1). 2b. Ist $(0, 0)$ Strudelpunkt von (2), so notwendig Strudelpunkt von (1). — Hauptergebnis ist: 3. Ist $(0, 0)$ Strudelpunkt von (2) und schärfer $f(x, y) = O(r^{1+\varepsilon})$, $g(x, y) = O(r^{1+\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, dann ist jede gegen $(0, 0)$ konvergente Lösung von (1) asymptotisch gleich einer Lösung von (2) und umgekehrt. Das heißt für den Fall, daß man o. B. d. A. die charakteristischen Wurzeln zu $-1 \pm i\lambda$, $\lambda > 0$ annimmt, daß die fraglichen Lösungen von (1) in der Form $x(t) = (v(t) \cos \lambda t + u(t) \sin \lambda t) e^{-t}$, $y(t) = (v(t) \sin \lambda t - u(t) \cos \lambda t) e^{-t}$, geschrieben werden können, wo $u(t)$, $v(t)$ für $t \rightarrow +\infty$ endlichen Grenzwerten $u(\infty)$, $v(\infty)$ zustreben und umgekehrt für jedes Zahlenpaar $u(\infty)$, $v(\infty)$ eine zugehörige Lösung $x(t)$, $y(t)$ von (1) existiert. — Ergänzend wird gezeigt, daß sich die $O(r^{1+\varepsilon})$ -Bedingung etwas abschwächen läßt, der Satz unter der alleinigen $o(r)$ -Bedingung jedoch nicht gilt. — Ähnlich folgt auch 4. Ist unter der (abgeschwächten) Bedingung von 3. $(0, 0)$ eigentlicher Knotenpunkt von (2), so auch von (1). Schäfke.

Wintner, Aurel: (L^2) -connections between the potential and kinetic energies of linear systems. Amer. J. Math. 69, 5—13 (1947).

Es wird das Verhalten der Lösungen der Differentialgleichungen

$$(1) \quad X''(t) + f(t)X(t) = g(t) \quad \text{und} \quad (2) \quad x''(t) + f(t)x(t) = 0$$

für $t \rightarrow \infty$ untersucht; dabei sind $f(t)$, $g(t)$ für $t \geq 0$ gegebene reelle stetige Funktionen; $x \in L^2$ bedeutet, daß $x(t)$ zur Klasse L^2 der in $(0, \infty)$ quadratisch integrierbaren Funktionen gehört; $f = \bar{O}(1)$ bedeutet, daß f nach oben beschränkt ist.

(A) Ist $f(t) = \bar{O}(1)$, $g \in L^2$ und $X \in L^2$ für eine Lösung von (1), so ist auch $X' \in L^2$. — (B) Ist $f = \bar{O}(1)$ und ist jede Lösung $x(t)$ von (2) nebst ihrer Ableitung $x'(t)$ beschränkt, so hat (1) genau dann eine Lösung $X \in L^2$, wenn es zu jeder Lösung

$x(t)$ von (2) eine (von x abhängende) Zahl c gibt, so daß $c - \int_0^t x(u)g(u)du \in L^2$

ist. — Das Folgende bezieht sich allein auf die Gleichung (2). (C) Ist $f = \bar{O}(1)$ und $x \in L^2$, so ist $x(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$; ist sogar $f = O(1)$, so ist auch noch $x'(t) \rightarrow 0$. (D) Nicht alle Lösungen von (2) gehören zur Klasse L^2 , wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist: (a) $f = \bar{O}(t)$; (b) aus $x \in L^2$ folgt stets $x' \in L^2$; (c) $f \geq 0$ und es gilt $|f(t_2) - f(t_1)| \leq C|t_2 - t_1|$ mit einer festen Konstanten C für alle hinreichend großen t_1, t_2 . Kamke (Tübingen).

Borg, Göran: On the completeness of some sets of functions. Acta math., Uppsala 81, 265—283 (1949).

Für das Eigenwertproblem $Ly = \lambda y$, $L \equiv -d^2/dx^2 + q(x)$ mit linearen homogenen Grenzbedingungen an den Endpunkten a , b ($-\infty < a$, $b \leq \infty$) werden von den Eigenfunktionen $\varphi_n(x)$ die Quadrate gebildet. Wenn dann für zwei verschiedene Arten von Randbedingungen, die im Einzelnen formuliert werden, das jeweils zugehörige Spektrum ein Punktspektrum hat und für die Eigenwerte λ_n ein endlicher Konvergenzexponent ϱ derart existiert, daß $\sum \frac{1}{|\lambda_n|^{\varrho+\varepsilon}} < \infty$ ist für $\varepsilon > 0$,

so gilt für die Quadrate der Eigenfunktionen $\varphi_n(x)$ bzw. $\varphi_m^*(x)$, daß das zusammengesetzte System $(\varphi_n^2(x), \varphi_m^{*2}(x))$ ein vollständiges System in der Klasse aller beschränkten Funktionen im Intervall ist. Wenn ferner das Randwertproblem nur unwesentlich singular für $x = b$ ist, so ist das System $(\varphi_n^2(x), \varphi_m^{*2}(x))$ ein minimales

System nach Ausschluß von höchstens zwei Quadraten von Eigenfunktionen. Das System $(\psi_n^2(x))$ ist nach Ausschluß höchstens einer dieser Funktionen minimal im Raume $L^2(b/2 - \varepsilon, b)(\varepsilon > 0)$.
Schmeidler (Berlin).

Funktionalanalysis. Abstrakte Räume:

Frola, Eugenio: Algebra metrizzate di ordine infinito e operatori lineari negli spazi hilbertiani. Rend. Sem. mat., Torino 8, 123—125 (1949).

Résumé d'une conférence dans laquelle furent exposées les notions suivantes: algèbres „abstraites d'ordre non fini“; espaces de Hilbert; norme dans l'ensemble des opérateurs continus d'un espace de Hilbert.
R. Godement (Nancy).

Neumann, John von: On rings of operators. Reduction theory. Ann. Math., Princeton, II. S. 50, 401—485 (1949).

Soit, pour $-\infty < \lambda < +\infty$, $H(\lambda)$ un espace de Hilbert séparable, et $\sigma(\lambda)$ une fonction réelle croissante bornée: σ définit une mesure $d\sigma$ et toutes les notions de mesurabilité, sommabilité, ... se référeront implicitement à $d\sigma$. Soit Φ une famille linéaire de fonctions $f(\lambda)$, $-\infty < \lambda < +\infty$, $f(\lambda) \in H(\lambda)$, vérifiant les conditions que voici: 1. si $f(\lambda) \in \Phi$, $g(\lambda) \in \Phi$, la fonction numérique $(f(\lambda), g(\lambda))$ est sommable; 2. si $f(\lambda)$ est telle que $(f(\lambda), g(\lambda))$ soit mesurable pour toute $g(\lambda) \in \Phi$, $\|f(\lambda)\|$ est mesurable; si de plus $\|f(\lambda)\|^2$ est sommable, $f(\lambda) \in \Phi$. Un espace de Hilbert séparable H est dit somme directe généralisée des $H(\lambda)$ pour $\sigma(\lambda)$ (et la famille Φ) s'il existe une application linéaire de Φ sur H , $f(\lambda) \rightarrow \int f(\lambda) \sqrt{d\sigma(\lambda)}$, telle que

$$\left(\int f(\lambda) \sqrt{d\sigma(\lambda)}, \int g(\lambda) \sqrt{d\sigma(\lambda)} \right) = \int (f(\lambda), g(\lambda)) d\sigma(\lambda).$$

Deux éléments $f(\lambda)$, $g(\lambda)$ de Φ ont même image dans H si et seulement si $f(\lambda) = g(\lambda)$ presque-partout. Les $H(\lambda)$ peuvent donc rester non définis sur un ensemble de mesure nulle. La dimension $k(\lambda)$ de $H(\lambda)$ est une fonction mesurable. (Cette notion est très voisine de celle définie par R. Godement, ce Zbl. 33, 376; mais aucune des deux définitions ne couvre exactement l'autre.) Lorsque $\sigma(\lambda)$ est une fonction de sauts, on retrouve la notion usuelle de somme directe d'espaces de Hilbert. — On appelle famille mesurable une suite d'éléments de Φ , $\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda), \dots$, telle que: 1. $\psi_1(\lambda), \psi_2(\lambda), \dots, \psi_{k(\lambda)}(\lambda)$ forment une base orthonormale de $H(\lambda)$, $\psi_i(\lambda) = 0$ pour $i > k(\lambda)$; 2. $f(\lambda) \in \Phi$ est équivalent à: a) $(f(\lambda), \psi_m(\lambda))$ est mesurable pour tout m , et b) $\sum_m \int |(f(\lambda), \psi_m(\lambda))|^2 d\sigma(\lambda) < +\infty$. Il existe une famille mesurable (et une seule „à une transformation unitaire mesurable près“): pour l'établir, on décompose un système fondamental dénombrable de vecteurs dans H , et on orthonormalise dans chaque $H(\lambda)$ les vecteurs obtenus. Ceci prouve que le choix de Φ , dans la définition d'une somme directe généralisée, n'a pas une importance essentielle. — A toute fonction bornée mesurable $\alpha(\lambda)$ on fait correspondre un opérateur borné $\alpha(A)$ dans H par

$$\alpha(A) \int f(\lambda) \sqrt{d\sigma(\lambda)} = \int \alpha(\lambda) f(\lambda) \sqrt{d\sigma(\lambda)}.$$

$\alpha(\lambda) \rightarrow \alpha(A)$ est un homomorphisme d'algèbres. Les $\alpha(A)$ forment un anneau d'opérateurs P , abélien, contenant 1. Si réciproquement on se donne un anneau P , abélien, contenant 1, dans un espace d'Hilbert H , H peut être représenté comme une somme directe généralisée à laquelle correspond cet anneau [et ceci d'une manière unique à une équivalence près; l'équivalence de deux telles représentations ne peut être définie complètement ici: en gros, elle permute les $H(\lambda)$, et modifie $\sigma(\lambda)$ sans changer les ensembles de mesure nulle]. Dans tout ceci, les mémoires de l'A. sur le calcul opérationnel sont constamment utilisés, ainsi que des résultats de Stone sur la multiplicité du spectre, qui permettent de fabriquer les $H(\lambda)$ quand P est donné. — La représentation de H par les $H(\lambda)$ fournit en somme une décomposition des vecteurs de H en vecteurs des $H(\lambda)$. On va décomposer les opérateurs et les anneaux d'opérateurs. Un opérateur $A(\lambda)$ [resp. un anneau d'opérateurs $M(\lambda)$] est mesurable en λ si $(A(\lambda) f(\lambda), g(\lambda))$ est mesurable pour $f(\lambda) \in \Phi$, $g(\lambda) \in \Phi$ [resp. s'il existe une suite $A_i(\lambda)$ d'opérateurs de $H(\lambda)$, mesurables en λ , et engendrant $M(\lambda)$ pour tout λ]. — Si A [resp. $A(\lambda)$] est un opérateur linéaire borné dans H [resp. $H(\lambda)$], on écrit $A \sim \sum A(\lambda)$ si

$$A \int f(\lambda) \sqrt{d\sigma(\lambda)} = \int A(\lambda) f(\lambda) \sqrt{d\sigma(\lambda)} \quad \text{pour } f(\lambda) \in \Phi.$$

Si A est donné, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence des $A(\lambda)$ est $A \in P'$; et ces $A(\lambda)$ sont déterminés „à un ensemble de mesure nulle près“. Si les $A(\lambda)$ sont donnés, les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de A sont: 1. $A(\lambda)$ est mesurable; 2. $\|A(\lambda)\|$ est essentiellement borné; A est alors déterminé. Le point difficile est la fabrication des $A(\lambda)$ quand A est donné: $\psi_i(\lambda)$ étant une famille mesurable, soient

$$\omega_i = \int \psi_i(\lambda) \sqrt{d\sigma(\lambda)}, \quad A^* \omega_i = \int f_i(\lambda) \sqrt{d\sigma(\lambda)}, \quad a_{mn}(\lambda) = (\psi_n(\lambda), f_m(\lambda));$$

les matrices $a_{mn}(\lambda)$ définissent essentiellement les $A(\lambda)$. La correspondance $A \rightarrow A(\lambda)$ jouit de toutes les propriétés simples désirables. — Si M [resp. $M(\lambda)$] est un anneau d'opérateurs dans H [resp. $H(\lambda)$], on écrit $M \approx \sum M(\lambda)$ si $A \in M$ équivaut à $A \sim \sum A(\lambda)$, $A(\lambda) \in M(\lambda)$. Si les $M(\lambda)$ sont des anneaux contenant 1, mesurables en λ , il existe un unique $M \approx \sum M(\lambda)$; on a $P \subset M \subset P'$. Si M est un anneau contenant 1, $P \subset M \subset P'$, il existe un système $M(\lambda)$ d'anneaux contenant 1, mesurables en λ , avec $M \approx \sum M(\lambda)$; ce système est unique à un ensemble de mesure nulle près. L'application $M \rightarrow M(\lambda)$ jouit de toutes les propriétés simples désirables [par exemple, $M \approx \sum M(\lambda)$ entraîne $M' \approx \sum M(\lambda)'$]. La démonstration de ce théorème est plus difficile que celle des précédents. Il faut, à plusieurs reprises, construire des opérateurs $A(\lambda)$, mesurables en λ , vérifiant certaines conditions; par un isomorphisme de $H(\lambda)$ sur un espace type H_0 [supposant $k(\lambda)$ constant pour simplifier], on se ramène à trouver des applications mesurables $\lambda \rightarrow (\lambda, B(\lambda))$ de r (ensemble des nombres réels) dans certains sous-ensembles de $r \times S$ (S , boule unité dans l'ensemble des opérateurs bornés de H_0 , munie de la topologie faible); S est métrisable complet et séparable, ce qui permet d'appliquer la théorie des ensembles analytiques. — Quand P est le centre de M , on a des décompositions $M \approx \sum M(\lambda)$, $M' \approx \sum M(\lambda)'$, où tous les $M(\lambda)$ sont des facteurs. L'étude de M est ainsi ramenée à celle des facteurs. Soit C_c l'ensemble (défini à un ensemble de mesure nulle près) des λ où $M(\lambda)$, $M(\lambda)'$ est une factorisation de classe c . Alors C_c est mesurable pour toute classe c , sauf peut être C_{II_∞, II_∞} et $C_{III, III}$ qui sont projectifs du 2ème ordre. $\Delta_M(E)$ s'appelle une fonction-poids si: 1. $\Delta_M(E)$ est défini pour les projecteurs E de M , $0 \leq \Delta_M(E) \leq +\infty$; $\Delta_M(E) = 0$ si et seulement si $E = 0$. 2. Si E_1, E_2, \dots sont des projecteurs orthogonaux de M , $\Delta_M(\sum E_i) = \sum \Delta_M(E_i)$. 3. Si U est un unitaire de M , $\Delta_M(E) = \Delta_M(U E U^{-1})$. Si M est un facteur, on retrouve essentiellement les dimensions relatives. Une dimension relative $d_{M(\lambda)}$ de $M(\lambda)$ est dite mesurable si, pour tout projecteur mesurable $E(\lambda)$ de $H(\lambda)$, $d_{M(\lambda)}(E(\lambda))$ est mesurable. Il existe une $d_{M(\lambda)}$ mesurable, et toute fonction-poids s'exprime par la formule: $\Delta_M(E) = \int \gamma(\lambda) d_{M(\lambda)}(E(\lambda)) d\sigma(\lambda)$ où $E \sim \sum E(\lambda)$ et où $\gamma(\lambda)$ est une fonction mesurable, $0 \leq \gamma(\lambda) \leq +\infty$. Dans les démonstrations, difficiles, de ces résultats, il faut encore faire usage des méthodes mentionnées au paragraphe précédent. — Ce mémoire a été écrit en 1937—38.

J. Dixmier (Paris).

Dixmier, Jacques: Mesure de Haar et trace d'un opérateur. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 152—154 (1949).

L'A. annonce quelques résultats extrêmement importants qui complètent ceux de F. J. Murray et J. von Neumann relatifs à l'existence d'une trace dans les facteurs. Premier théorème: dans un espace de Hilbert H , soit M un anneau d'opérateurs arbitraire; pour $A \in M$, soit K_A le plus petit ensemble convexe fermé pour la topologie uniforme contenant les UAU^{-1} ($U \in M$ unitaire); alors K_A contient au moins un élément du centre de M . Deuxième théorème: pour que, quel que soit $A \in M$, K_A contienne un seul élément du centre de M , il faut et il suffit que M possède la propriété suivante: pour $U \in M$, la relation $U^*U = 1$ implique $UU^* = 1$. Dans ce cas, on peut définir une application linéaire $A \rightarrow \text{Tr}(A)$ de M sur son centre, application qui possède les propriétés formelles d'une trace (et se réduit du reste à la trace lorsque M est un facteur). On trouvera un exposé détaillé de ces résultats dans les Ann. sci. École norm. sup., III. S. 66, 209—261 (1949); précisons aussi que ces résultats ne supposent aucune hypothèse de séparabilité, en sorte qu'il semble difficile de les déduire des résultats déjà connus pour les facteurs et de la „Reduction theory“ de J. von Neumann.

R. Godement (Nancy).

Brodskij, M. S. und M. S. Livšic: Über eine lineare Operatorfunktion, die invariant ist bezüglich der Gruppe der Verschiebungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 68, 213—216 (1949) [Russisch].

Soient $s \rightarrow U(s)$ une représentation unitaire du groupe additif des nombres réels dans un espace de Hilbert \mathfrak{H} , A et B deux opérateurs définis dans \mathfrak{H} . L'A. étudie les conditions dans lesquelles on a $A + (s + t)B = U(s)^{-1}(A + tB)U(s)$ quels que soient s et t . En supposant B borné, A et A^* définis dans des sous-espaces partout denses invariants par les $U(s)$, on obtient, au moins si B ne possède pas la valeur propre 0 et si \mathfrak{H} est monogène relativement aux $U(s)$, le résultat suivant. A un isomorphisme près, on peut réaliser \mathfrak{H} comme espace L^2 relatif à une mesure positive et bornée sur la droite, d'ailleurs absolument continue, $U(s)$ est alors la

multiplication par e^{isx} ; B est la multiplication par une fonction $b(x)$; enfin, A est un opérateur vérifiant $\bar{g} \cdot A f - f \cdot \overline{A^* g} = -i \cdot d/dt (b \cdot f \cdot \bar{g})$. *R. Godement.*

Esser, Martinus: Analyticity in Hilbert space and self-adjoint transformations. *Amer. J. Math.* **69**, 825—835 (1947).

Es wird eine neue Herleitung der Spektralzerlegung beliebiger selbstadjungierter Operatoren im Hilbertschen Raum H gegeben. Ist T selbstadjungiert, λ nicht reell, u beliebig in H , so wird durch $T(f(\lambda)) - \lambda f(\lambda) = u$ eine in λ analytische Funktion $f(\lambda)$ mit Werten in H erklärt; es ist $|f(\lambda)| \leq |J(\lambda)|^{-1} |u|$ [$J(\lambda)$ der Imaginärteil von λ]. Setzt man $L(\lambda) = (f(\lambda), u)$, so gilt $|J(\lambda)| |L(\lambda)| \leq |u|^2$ und $(*) (\lambda - \bar{\mu}) (f(\lambda), f(\mu)) = L(\lambda) - L(\mu)$. Das folgende Lemma enthält den wesentlichen Teil des neuen Beweises: Es sei $f(\lambda)$ analytisch für nichtreelle λ und es gelte für nichtreelle λ, μ die Beziehung $(*)$, wobei $L(\lambda)$ eine Funktion mit beschränktem $|J(\lambda) L(\lambda)|$ ist. Dann gibt es eine für alle x erklärte Funktion $u(x)$ mit Werten in H mit in $-\infty \leq x \leq +\infty$ beschränkter Variation, so daß $f(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} du(x)/(x - \lambda)$

wird. $u(x)$ ist von rechts stetig und erfüllt für alle $a \leq b \leq c \leq d$ die Orthogonalitätsrelationen $(u(b) - u(a), u(d) - u(c)) = 0$. Der Beweis benützt eine auf Doob und Koopman [*Bull. Amer. Math. Soc.* **40**, 601—605 (1934); dies. Zbl. **10**, 171]

zurückgehende Darstellung von $L(\lambda)$ als $\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \lambda)^{-1} d\varrho(x)$ in der oberen Halbebene.

Ist T gegeben, so entspricht jedem $u \in H$ ein $f(\lambda)$, diesem nach dem Lemma ein $u(x)$, die „Spektralprojektion“ von u . Für festes x bilden alle $u(x)$ eine lineare Mannigfaltigkeit \mathfrak{M}_x , und $u(x)$ ist die Projektion von u auf \mathfrak{M}_x . Die \mathfrak{M}_x erweisen sich schließlich als die Spektralmannigfaltigkeit von T . *G. Köthe (Mainz).*

Julia, Gaston: Sur les systèmes complets de l'espace hilbertien. *C. r. Acad. Sci., Paris* **227**, 413—416 (1948).

Sind W und V zwei beliebige Unterräume des Hilbertschen Raumes \mathfrak{H} , und ist (ε_n) eine orthonormale Basis in W , so ist die Summe der Längenquadrate der Projektionen der ε_n auf V eine von der Wahl der Basis in W unabhängige Konstante, eine nur von der gegenseitigen Lage von W und V abhängige Invariante. Im Spezialfall $W = \mathfrak{H}$ ergibt sich die Dimensionszahl von V . Die Umkehrung dieses Spezialfalls lautet: Ist ein Vektorensystem (ε_n) in \mathfrak{H} so beschaffen, daß die Summe der Längenquadrate seiner Projektionen auf irgendeinen Unterraum V einer festen Dimensionszahl p eine von Null verschiedene Konstante ist, so ist das System ε_n , wenn es geeignet normiert wird, entweder ein vollständiges Orthonormalsystem in \mathfrak{H} , oder die Projektion eines solchen Systems in einem \mathfrak{H} enthaltenden Hilbertschen Raume \mathfrak{H}_1 auf \mathfrak{H} . Es folgen Anwendungen dieser Aussagen, die Sätze von Hilding und Bary enthalten und z. T. verallgemeinern. *Schmeidler (Berlin).*

Yood, Bertram: Additive groups and linear manifolds of transformations between Banach spaces. *Amer. J. Math.* **71**, 663—677 (1949).

Soient E et F deux espaces de Banach complexes, $A(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F ; l'A. définit sur $A(E, F)$ cinq topologies, à savoir 1) les topologies uniforme, forte, faible (analogues à celles que J. von Neumann a définies pour l'anneau des opérateurs d'un espace de Hilbert); 2) les topologies finie et faiblement finie (la première étant due à N. Jacobson). L'A. énonce un certain nombre de résultats concernant l'adhérence dans l'une ou l'autre de ces topologies des sous-groupes de $A(E, F)$. Par exemple, soit G un sous-groupe de $A(E, F)$; soit $N_1(G)$ le sous-espace de F soutenu par les éléments de la forme Tx ($T \in G$, $x \in E$); soit $R_1(G)$ l'ensemble des $T \in A(E, F)$ tels que $TS \in G$ pour tout $S \in G$; il est clair que ces T conservent $N_1(G)$, et leurs restrictions à ce sous-espace forment un anneau $R_1(G)$; alors, si $R_1(G)$ est doublement transitif (au sens de Jacobson) dans $N_1(G)$, l'adhérence de G dans la topologie finie est formée

des $T \in A(E, F)$ qui possèdent les deux propriétés suivantes: $Ux = 0$ pour tout $U \in G$ implique $Tx = 0$; tout élément de la forme Ux ($U \in G, x \in E$) est de la forme Ty ($y \in E$). Autre résultat: une sous-algèbre de $A(E, E)$ qui est uniformément fermée et (algébriquement) irréductible est dense au sens de Jacobson. Enfin, si I est un idéal à gauche non nul de $A(E, E)$, les seuls endomorphismes de E qui permutent à tous les éléments de I sont les scalaires, en sorte que, si I est une fois transitif, I est dense au sens de Jacobson. (N. B. Il est facile de voir, comme J. Dieudonné l'a indiqué au rapporteur, que si une algèbre M d'opérateurs continus d'un espace de Banach E est algébriquement irréductible, les seuls endomorphismes — continus ou non — de E qui permutent à M sont les scalaires; donc, d'après les résultats de Jacobson, M est dense, même si M n'est pas uniformément fermée.)

R. Godement (Nancy).

Yood, Bertram: Transformations between Banach spaces in the uniform topology. Ann. Math., Princeton, II. S. 50, 486—503 (1949).

Soient X et Y deux espaces de Banach et $A(X, Y)$ l'espace des applications linéaires continues de X dans Y , muni de la topologie uniforme. Pour $T \in A(X, Y)$, soit $N(T)$ l'image de X par T ; l'A. étudie d'abord comment $N(T)$ varie lorsque T converge vers une limite, et obtient en particulier le résultat suivant: la relation „ T est un isomorphisme ou bien $N(T) = Y$ “ est équivalente à la suivante: „ $T_n \rightarrow T$ implique $\limsup N(T_n) \subset N(T)$ “ — d'où résulte, dans certains cas, la possibilité de démontrer l'existence de solutions d'une équation $Tx = a$ en examinant les équations $T_n x = a$, où T_n est une suite d'opérateurs convergent vers T (bien entendu, des résultats analogues étaient déjà connus de S. Banach). La suite de l'article consiste à étendre à $A(X, Y)$ des résultats de Sobczyk [Trans. Amer. math. Soc. 55, 153—169 (1944)] sur la classification des opérateurs, et de Rickart (ce Zbl. 29, 140) sur les éléments singuliers des algèbres normées. R. Godement.

Hewitt, Edwin: A class of topological spaces. Bull. Amer. math. Soc. 55, 421—426 (1949).

Verf. betrachtet Hausdorffsche Räume, die einen bikompakten Raum als eineindeutiges stetiges Bild besitzen; \mathfrak{X} sei die Klasse sämtlicher solcher Räume X . Verf. gibt Charakterisierungen der Klasse \mathfrak{X} an. Es sei $\mathfrak{C}(X, R)$ [$\mathfrak{C}^*(X, R)$] der Ring der auf X stetigen [stetigen und beschränkten] reellen Funktionen. Ein Ideal \mathfrak{I} wird reell genannt, wenn $\mathfrak{C}(X, R)/\mathfrak{I} \approx R$. Satz A: Dann und nur dann gilt $X \in \mathfrak{X}$, wenn $\mathfrak{C}^*(X, R)$ einen geschlossenen $f(x) \equiv 1$ enthaltenden Unterring \mathfrak{A} enthält, so daß jedes maximale Ideal von \mathfrak{A} zu genau einem reellen Ideal von $\mathfrak{C}(X, R)$ gehört. Der tiefere Satz B bezieht sich auf sogenannte Q -Räume (s. dies. Zbl. 32, 286) und ist schwerer zu formulieren.

Fáry (Paris).

Métral, Paul: Fonctions p. p. l. dans un espace linéaire. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 892—894 (1949).

Etant donné un anneau A et un espace vectoriel topologique localement convexe complet E , l'A. définit, pour les fonctions f définies sur A et à valeurs dans E , la notion de presque-périodicité à gauche (resp. droite) par la propriété suivante: l'ensemble des fonctions $f(ax + b)$ (resp. $f(xa + b)$) est totalement borné. L'A. annonce que les méthodes de S. Bochner et J. von Neumann permettent d'étendre à ces fonctions les résultats bien connus dans le cas des groupes; on est bien obligé de reconnaître que ce fait n'est pas étonnant, et de se demander si, par hasard, la théorie ici exposée ne pourrait pas se déduire de celle de Bochner et von Neumann.

R. Godement (Nancy).

Eberlein, W. F.: Abstract ergodic theorems and weak almost periodic functions. Trans. Amer. math. Soc. 67, 217—240 (1949).

E ein Banachscher Raum, G eine Halbgruppe stetiger linearer Transformationen von E in sich. G heißt ergodisch, wenn (dies ist das Wesentliche) eine Mittelbildung $T_\alpha = \sum a_j T_j$ mit $a_j \geq 0$, $\sum a_j = 1$, $T_j \in G$, gefunden werden kann, welche aus

jedem Element $x \in E$ ein gegenüber G nahezu invariantes $T_\alpha x$ macht, d. h.:

$$\lim_{\alpha} (T T_\alpha x - T_\alpha x) = 0$$

für jedes $T \in G$ und $x \in E$. Ein Element $x \in E$ (mit ergodischem G) heißt ergodisch, wenn $\lim T_\alpha x = y$ existiert. Verf. beweist als „mean ergodic theorem“ u. a., daß x dann und nur dann ergodisch ist, wenn in der abgeschlossenen Hülle aller $(\sum a_j T_j) x$ mit $a_j \geq 0$, $\sum a_j = 1$ $T_j \in G$ ein Fixpunkt gegenüber G liegt. Dieser Fixpunkt ist eindeutig bestimmt und identisch mit y . Existenz des Mittelwertes von fastperiodischen Funktionen, Fejérsummierung von Fourierreihen und verschiedene allgemeine Ergodensätze (z. B. für eine beliebige Abelsche Halbgruppe) lassen sich obigem Satze unterordnen, wobei allerdings zu beachten ist, daß meist der Nachweis der Ergodizität des jeweiligen G eine Hauptschwierigkeit darstellt. — Durch diese abstrakte Ergodentheorie wurde Verf. auf eine neue Verallgemeinerung von „fastperiodisch“ geführt. G sei lokalbikompakt und Abelsch. Eine Funktion $x(t)$ auf G heißt schwach fastperiodisch, wenn die Menge aller Funktionen $x(t+s)$ der Variablen t , mit s beliebig in G , schwach bedingt kompakt ist. (Die schwache Topologie im Raume der x wird mit Hilfe aller dort erklärten linearen Funktionale eingeführt.) Existenz des Mittelwertes schwach fastperiodischer Funktionen folgt aus dem Ergodensatz für Abelsche Gruppen. Die Parsevalsche Gleichung wird bewiesen. Beispiele schwach fastperiodischer Funktionen sind die positiv definiten und die stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktionen. (Anmerkung des Ref.: Für letztere Funktionen wird die Theorie insofern trivial, als die Mittelwerte dieser Funktionen, jedenfalls wenn G die reelle Zahlengerade ist, verschwinden.) Auf der reellen Zahlengeraden sind alle schwach fastperiodischen Funktionen Weyl-fastperiodisch. Die schwach fastperiodischen Funktionen zeichnen sich vor anderen Klassen verallgemeinerter fastperiodischer Funktionen durch größere Geschlossenheit aus, z. B. ist das Produkt und die Faltung schwach fastperiodischer Funktionen wieder schwach fastperiodisch.

Maak (Hamburg).

Rochlin, V. A.: Über die Zerlegung eines dynamischen Systems in transitive Komponenten. Mat. Sbornik, n. S. 25 (67), 235—249 (1949) [Russisch].

Soit M un espace muni d'une mesure positive m ; on suppose vérifiés les axiomes des „espaces de Lebesgue“ introduits par l'A. (ce Zbl. 33, 169), ce qui est le cas par exemple lorsque M est un espace métrique compact et m une mesure de Radon. Considérons les automorphismes de M qui conservent m (autom.); si on identifie deux autom. qui coïncident presque partout, on voit que ces autom. forment un groupe $\mathfrak{A}(M)$; on notera $\mathfrak{T}(M)$ l'ensemble des classes d'éléments conjugués de $\mathfrak{A}(M)$, et, pour un $S \in \mathfrak{A}(M)$, par $\tau(S)$ la classe à laquelle il appartient („type“ de S); le but de cet article est de caractériser le type d'un autom. S au moyen de sa décomposition en autom. transitifs. Le § 1 a pour but d'étendre la notion de mesurabilité à des fonctions prenant leurs valeurs dans un ensemble $\mathfrak{T}(M)$; l'A. procède comme suit. Tout d'abord, il est facile d'introduire une topologie sur $\mathfrak{A}(M)$, de telle sorte que $\mathfrak{A}(M)$ devienne un groupe métrique complet à base dénombrable. Ceci fait, soit L un autre ensemble mesuré; on définit comme suit les ensembles mesurables situés dans le produit $P = L \times \mathfrak{A}(M)$: $E \subset P$ est mesurable si $E = N \cup F$, où N a pour projection sur L un ensemble de mesure nulle, et où F est engendré par l'opération de Suslin à partir d'ensembles de la forme $X \times U$ (X mesurable dans L , U ouvert dans $\mathfrak{A}(M)$); soit alors $x \rightarrow \tau_x$ une application de L dans $\mathfrak{T}(M)$; pour $x \in L$, soit $\Phi(x)$ l'ensemble des $S \in \mathfrak{A}(M)$ dont le „type“ est τ_x ; alors on dit que l'application en question est mesurable si, dans P , l'ensemble $\bigcup_{x \in L} \{x\} \times \Phi(x)$ est mesurable au sens précédent. Par

ailleurs, si $(S_x)_{x \in L}$ est une famille d'autom. de M (i.e. une application de L dans $\mathfrak{A}(M)$), on dit qu'elle est mesurable si, pour tout ouvert $U \subset \mathfrak{A}(M)$, les x tels que $S_x \in U$ forment un ensemble mesurable dans L . Le premier résultat de l'A. est le suivant: a) si $(S_x)_{x \in L}$ est mesurable, il en est de même de l'application $x \rightarrow \tau(S_x)$; b) réciproquement toute application mesurable de L dans $\mathfrak{T}(M)$ peut s'obtenir par $x \rightarrow \tau(S_x)$ où S_x est fonction mesurable de x ; c) si $(S_x)_{x \in L}$ et $(S'_x)_{x \in L}$ sont deux familles mesurables d'autom., et si $\tau(S_x) = \tau(S'_x)$ pour tout x , alors il existe une famille mesurable $(T_x)_{x \in L}$ d'autom. telle que l'on ait $S'_x = V_x S_x V_x^{-1}$ pour tout x . Ces résultats reposent essentiellement sur le théorème général suivant, qui semble prendre depuis peu de temps une grande importance pratique (voir par exemple la „Reduction theory“ de J. von Neumann): si f est une application mesurable d'un espace mesuré X dans un espace mesuré Y , il existe un ensemble mesurable $X' \subset X$ sur lequel f est biunivoque et tel que $f(X') = Y$.

Le § 2 résoud le problème d'équivalence posé au début. Tout d'abord, l'A. donne une démonstration du résultat bien connu de J. von Neumann sur la décomposition d'un autom. S en composantes transitives; de façon précise, on montre qu'il existe un espace mesuré L (dont on désigne la mesure par α) et, pour chaque $x \in L$, une mesure m_x sur M , de telle sorte que: a) $\int m_x \cdot d\alpha(x) = m$ b) chaque m_x est portée par un ensemble M_x invariant par S , les M_x constituant une partition de M ; c) pour presque tout x , m_x est invariante par S , et la restriction S_x de S à M_x est transitive relativement à m_x (la démonstration de l'A. utilise essentiellement la théorie de la mesure-quotient et le théorème ergodique). Maintenant, soit U un autre autom. de M ; il lui correspond de même une famille $(U_y)_{y \in N}$ de composantes transitives, et il s'agit de savoir si l'on a $\tau(S) = \tau(U)$. Pour cela, l'A. se ramène d'abord au cas où S et U n'ont aucune composante périodique (celles-ci n'interviennent pas de façon essentielle); alors toutes les mesures m_x associées à S , de même que celles associées à U , sont continues, donc équivalentes à la mesure de Lebesgue ordinaire sur le segment $I = [0, 1]$ de la droite; on peut donc identifier S_x à un autom. de I , dont le type sur I est parfaitement déterminé—soit $\tau_x \in \mathfrak{T}(I)$ ce type; on a ainsi une application de L dans $\mathfrak{T}(I)$; de même on a une application $y \rightarrow \tau'_y$ de N dans $\mathfrak{T}(I)$. Ces notions préliminaires étant explicitées, le résultat de l'auteur est le suivant: a) l'application $x \rightarrow \tau_x$ est mesurable au sens du § 1; b) pour que $\tau(S) = \tau(U)$ il faut et il suffit qu'il existe un isomorphisme $x \rightarrow x'$ de l'espace mesuré L sur l'espace mesuré N tel que l'on ait $\tau_x = \tau'_{x'}$ pour tout x ; c) enfin, $x \rightarrow \tau_x$ étant une application mesurable d'un espace mesuré L dans l'ensemble des types transitifs d'autom. de I , il existe un autom. S d'un espace mesuré dont la décomposition en composantes transitives conduit précisément à l'application donnée.

R. Godement (Nancy).

Hartmann, Philip: On the ergodic theorems. Amer. J. Math. 69, 193—199 (1947).

Cet article contient une démonstration complète du théorème ergodique de Birkhoff, et du théorème ergodique général. La démonstration fait essentiellement usage de l'inégalité suivante (inégalité de Birkhoff renforcée):

$$\alpha \mu(S \cdot U) \leq \int_{S \cdot U} f(P) d\mu$$

où α est un nombre réel positif arbitraire, μ la mesure invariante par le courant τ_t envisagé, S un ensemble mesurable invariant par τ_t , et U l'ensemble des points vérifiant:

$$\text{Borne supérieure } t^{-1} \int_0^t f(\tau_u P) du > \alpha.$$

$0 < t < \infty$

L'A. donne une démonstration originale de cette inégalité en s'appuyant sur un lemme de F. Riesz.

Reeb (Saverne).

Segal, I. E.: Postulates for general quantum mechanics. Ann. Math., Princeton, II. S. 48, 930—948 (1947).

Es wird ein Kalkül für die Observablen der Quantenmechanik definiert, der mit weniger Postulaten auskommt, als sonst üblicherweise unter Heranziehung der Operatoren im Hilbertschen Raum gefordert werden müssen, insofern weist die Arbeit Berührungspunkte mit einer Arbeit von v. Neumann auf [Mat. Sbornik, n. S. 1, 415—482 (1936); dies. Zbl. 15, 245]. Das System der Observablen genügt den folgenden Postulaten I. 1. \mathfrak{A} ist ein reeller linearer Raum. 2. Es gibt eine Identität I und für jedes $U \in \mathfrak{A}$ läßt sich U^n in \mathfrak{A} (n pos. ganz) bilden derart, daß für Polynome f, g, h , mit reellen Koeffizienten, für die mit rellem x $f(g(x)) = h(x)$ gilt, die Relation $f(g(U)) = h(U)$ erfüllt ist. II. 1. Zu jedem $U \in \mathfrak{G}$ gibt es ein reelles, nicht negatives $\|U\|$ derart, daß \mathfrak{A} hinsichtlich $\|U\|$ als Norm ein reeller Banachscher Raum ist. 2. $\|U^2 - V^2\| \leq \text{Max} \{\|U\|, \|V\|\}$. 3. $\|U^2\| = \|U\|^2$. 4. $\|\sum_{U \in \mathfrak{R}} U^2\| \leq \|\sum_{U \in \mathfrak{S}} U^2\|$, falls $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{S}$ und $\mathfrak{R}, \mathfrak{S}$ Mengen von endlich vielen Elementen von \mathfrak{A} sind. 5. U^2 ist stetige Funktion von U . — Unter einem Zustand von \mathfrak{A} werde eine reellwertige lineare Funktion f auf \mathfrak{A} verstanden, für die $f(U^2) \geq 0$, $f(I) = 1$ ist. Ein reiner Zustand ist ein solcher, der nicht Linearkombination mit pos. Koeffizienten von zwei anderen Zuständen ist. $f(U)$ heißt Erwartungswert von U im Zustande f . Eine Menge von Zuständen heißt vollständig, falls es für irgend zwei Observable einen Zustand in der Menge gibt, derart, daß die Observablen verschiedene Erwartungswerte haben. Für irgend zwei Observable $U \in \mathfrak{A}$, $V \in \mathfrak{A}$

wird ein formales Produkt durch $U \circ V = \frac{1}{4}((U + V)^2 - (U - V)^2)$ definiert. \mathfrak{A} heißt kommutativ, falls für die Produktbildung $(U \circ V) \circ W = U \circ (V \circ W)$, $(U + V) \circ W = U \circ W + V \circ W$, $((\alpha U) \circ V) = \alpha (U \circ V)$ gilt. Es wird bewiesen, daß ein kommutatives System \mathfrak{A} algebraisch und metrisch isomorph dem System aller reellwertigen stetigen Funktionen auf einem kompakten Hausdorffschen Raum ist. Daraus folgt: das durch eine Observable erzeugte Untersystem ist algebraisch und metrisch isomorph mit dem System aller stetigen Funktionen eines kompakten Hausdorffschen Raumes. Damit wird die Definition ausgesprochen: Die Spektralwerte einer Observablen U sind die Werte der Funktion, die U nach dem letzten Isomorphismus entspricht. Die Observable U soll nach Definition dann und nur dann einen bestimmten Wert in einem Zustande f des Systems annehmen, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist: 1. Die Dispersion der Spektralwerte von U um ihren Erwartungswert ist Null. 2. f ist rein auf dem durch U erzeugten Untersystem. 3. $f(U^2) = (f(U))^2$. Damit kann definiert werden, daß eine Menge von Observablen gleichzeitig beobachtbar ist, falls das System \mathfrak{B} , das sie erzeugen, eine vollständige Menge von Zuständen besitzt, derart, daß in jedem von ihnen eine Observable von \mathfrak{B} einen bestimmten Wert hat. Es wird gezeigt, daß eine Menge von Observablen dann und nur dann gleichzeitig beobachtbar ist, falls es kommutativ ist. — Hat man ein System \mathfrak{A} mit der Eigenschaft, daß eine Summe von Quadraten von Observablen das Quadrat einer Observablen ist, so ist ein reiner Zustand eines Untersystems identisch mit einem reinen Zustand des Gesamtsystems auf diesem Untersystem. — Es zeigt sich weiter, daß die Norm auch rein algebraisch als untere Grenze der Zahlen α definiert werden kann, für die sowohl $\lambda I - U$ als auch $\lambda I + U$ Quadrate sind. *K. Schröder (Berlin).*

Praktische Analysis:

Chanov, B.: Kinematische Lösung einer dreigliedrigen Gleichung. Akad. Nauk SSSR, Trudy mat. Inst. Steklov **20**, 131—133 (1947) [Russisch].

Es wird eine einfache kinematische Apparatur beschrieben, die zur angenäherten Lösung der Gleichung

$$z^n + pz + q = 0 \quad (n \leq 0)$$

mit reellen oder komplexen Koeffizienten p und q dienen kann und sämtliche (auch die komplexen) Werte z liefert. Benutzt wird die Darstellung durch Polarkoordinaten $z = re^{i\varphi}$. *Schmeidler (Berlin).*

Melent'ev, P. V.: Zur Lösung von Gleichungen hohen Grades. Priklad. Mat. Mech., Moskva **12**, 215—218 (1948) [Russisch].

Verf. gibt eine Methode, die komplexen Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit reellen Koeffizienten $F(z) = 0$ näherungsweise zu bestimmen, ohne mit komplexen Zahlen zu rechnen. Um die komplexe Wurzel $z_0 = x_0 + iy_0$ zu finden, muß x_0 so bestimmt werden, daß für $F(x_0 + iy) = P(y^2) + iyQ(y^2)$ die Polynome P und Q eine gemeinsame Nullstelle (nämlich y_0^2) besitzen. Wird der letzte Rest $R(x_0)$ des auf P und Q angewandten euklidischen Algorithmus für genügend viele x_0 berechnet, so kann $R(x_0) = 0$ näherungsweise gelöst werden. Der mit dem gefundenen x_0 durchgeführte Algorithmus liefert y_0^2 als Nullstelle des letzten Divisors. *G. Hajós (Budapest).*

Pflanz, Erwin: Über ein Verfahren zur genäherten Auflösung von Gleichungen $f(x) = 0$. Arch. Math., Oberwolfach **2**, 5—9 (1949/50).

Liegt in einem Intervall $[x_1, x_2]$ nur eine Nullstelle einer Funktion $f(x)$, so kann man Näherungswerte für diese Nullstelle durch die Nullstelle einer Ersatzparabel $p(x)$ bekommen, die so bestimmt wird, daß die Ordinaten von $f(x)$ und $p(x)$ an den Intervallenden gleich sind und daß, wenn $p(x)$ eine Parabel 2. Ordnung ist, die

Integrale über das Intervall, bei 3. Ordnung auch noch die zweifachen Integrale für beide Funktionen übereinstimmen. Eine Fehlerabschätzung wird gegeben; an einem Beispiel wird die Methode mit anderen Näherungsverfahren verglichen.

Willers (Dresden).

Nejšuler (Neuschuler), L. Ja.: Über die Eindeutigkeit der Darstellungen von Funktionen mehrerer Veränderlichen durch Superpositionen von Funktionen zweier Veränderlichen. Uspechi mat. Nauk 3, Nr. 6, 205—210 (1948) [Russisch].

Die hier behandelte Frage steht in Zusammenhang mit der nach der günstigsten Vertafelung von Funktionen mehrerer Veränderlicher bzw. ihrer Darstellung in Nomogrammen. Verf. kommt zu folgendem Resultat: Ist eine Gleichung zwischen $n + 1$ Variablen in $n - 1$ Gleichungen mit je 3 Veränderlichen aufzuspalten, so läßt sie sich durch ein aus $n - 1$ Einzelnomogrammen zusammengesetztes Gesamtnomogramm eindeutig bis auf die Verzifferung darstellen. Wird diese Gleichung in n Gleichungen mit je drei Veränderlichen aufgespalten, so ist die eindeutige Vertafelung nur dann möglich, wenn keins der Elementarnomogramme sich als Fluchtlinientafel mit drei parallelen Skalen darstellen läßt.

Willers (Dresden).

Bouzzat, Jean: Sur l'intégration numérique approchée par la méthode de Gauss généralisée et sur une extension de cette méthode. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 1201—1203 (1949).

Allgemeine Approximationsformeln für Integrale des Produkts zweier gegebenen Funktionen werden aufgestellt, wobei die Werte des Integranden in gewissen zweckmäßig gewählten Punkten benutzt werden. Man kann zwei von diesen Punkten, etwa die Endpunkte, im Voraus vorschreiben. Wichtige Spezialfälle werden hervorgehoben.

Nyström (Helsinki).

Rubbert, F. K.: Zur Praxis der numerischen Quadratur. Z. angew. Math. Mech. 29, 186—188 (1949).

Der Fehler vieler Quadraturformeln läßt sich durch ein Restglied darstellen, welches bis auf einen bekannten Faktor einen Mittelwert einer höheren Ableitung der zu integrierenden Funktion darstellt. Weiß man, daß die höhere Ableitung das Vorzeichen nicht wechselt und kennt man das Vorzeichen, so ist damit auch das Vorzeichen des Fehlers bekannt. Verf. gibt einige Quadraturformeln positiven und negativen Fehlers an, um das gesuchte Integral einzuschließen. Die Mitteilung von Quadraturformeln für empirisch gegebene Ordinaten wird angekündigt.

Bückner.

Beyerle, K.: Der Schlupffehler des Reibradintegrators. Z. angew. Math. Mech. 29, 186 (1949).

Das Gesetz des Reibradintegrators, dessen Scheibe um den Winkel α , dessen Rad um den Winkel z rotiert, ist ideal $dz = y dx$, wenn y in geeigneten Einheiten den Abstand des Rades vom Scheibenmittelpunkt mißt. Verf. findet, daß zum Integral $z = \int y dx$ ein Fehler der Größe $\delta = (y_2 - y_1) M/Q r^2 \rho$ hinzukommt. Dabei kennzeichnen y_1 und y_2 das Intervall, in dem der Integrand y während der Integration verändert wurde. Q ist der Anpreßdruck, r der Radius, M das Lastmoment des Reibrades; ρ ist der Reibungskoeffizient. Wichtig ist, daß der von der Reibscheibe während der Integration zurückgelegte Winkelweg nicht in den Fehler eingeht. Der Fehler eines Reibradintegrators hängt also wesentlich von seiner Dimensionierung ab. Sorgt man dafür, daß die Reibscheibe hinreichend viele Umdrehungen während der Integration ausführt, so fällt δ nicht ins Gewicht. Dies ist bei allen bekannten Integrieranlagen zum Lösen von Differentialgleichungen der Fall, die mit Reibradintegratoren versehen sind. Ihre Genauigkeit wurde bisher noch von keinem anderen Integrieranlagentyp erreicht. Ist jedoch ein Integrator ungünstig dimensioniert, so tritt der Fehler δ störend in Erscheinung. Bei einem von der Max-Planck-Gesellschaft gebauten Integrator konnte Verf. einen Fehler von etwa 3% der zu bildenden Integrale feststellen. — Auf Wunsch des Verf. wurde der gleiche Integrator vom Ref. vor und nach einigen Änderungen des Getriebes seinerzeit untersucht. Der δ -Effekt bestätigte sich. Aber er konnte durch Ersatz des Reibradzapfenlagers durch ein Kugellager und durch Abkuppeln eines mit dem Reibrad verbundenen Zählwerkes soweit reduziert werden, daß der Integrationsfehler sowohl positive wie negative Werte annahm.

Hans Bückner.

Duncan, W. J.: Assessment of errors in approximate solutions of differential equations. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 1, 470—476 (1948).

Am Beispiel der Aufgabe $\Delta\Phi = f$ mit homogenen Randbedingungen für Φ wird gezeigt, wie man die Lösung mit Hilfe einer schon bekannten Näherung Φ_a einschließen kann, wenn die Lösung Φ als Integraltransformation von f mit einer Greenschen Funktion konstanten Vorzeichens darstellbar ist. Das Einschließungsverfahren läuft darauf hinaus, das Differentialgleichungsproblem für den Fehler $\Phi_a - \Phi$ aufzustellen und den Fehler, der die Integraltransformierte des Defizits $\Delta\Phi_a - f$ ist, abzuschätzen. Zur Abschätzung werden bekannte Schranken des Defizits und der Umstand benutzt, daß die Greensche Funktion das Vorzeichen nicht wechselt. — Verf. weist auf die Verallgemeinerungsfähigkeit des Verfahrens und — im Zusammenhang mit der Bestimmung geeigneter Näherungslösungen — auf eine seiner früheren Arbeiten (s. dies. Zbl. 31, 36) hin, wo ein an sich bekanntes Verfahren zur Verbesserung von Näherungslösungen erörtert wurde. — Die Kunstgriffe, mit dem Defizit und dem konstanten Vorzeichen des Kerns einer Integraltransformation zu operieren, sind nicht eben originell [vgl. z. B. Ref., Z. angew. Math. Mech. 22, 143—152 (1942); dies. Zbl. 27, 79]. *H. Bückner (Minden).*

Ludeke, Carl A.: An electro-mechanical device for solving non-linear differential equations. J. appl. Physics, Lancaster Pa. 20, 600—607 (1949).

Es handelt sich im wesentlichen um ein elektromechanisches Modell für die Differentialgleichung

$$Jy'' + ay' + k_1y + k_2y^3 = b \sin \omega x; J, a, k_i, b, \omega = \text{const.}$$

Dazu dient ein drehbar gelagerter Hebel; er wird unter den Einfluß von Kräften gestellt, die den einzelnen Gliedern der Differentialgleichung proportional sind, so daß zwischen seinem Drehwinkel y und der Zeit x gerade der durch die Differentialgleichung bestimmte Zusammenhang besteht. Die Bewegung des Hebels wird oszillographisch registriert. — Das erste Glied der Gleichung kennzeichnet den Trägheitswiderstand des Hebels, das zweite wird durch eine magnetische Dämpfungseinrichtung, das dritte und vierte durch eine auf den Hebel wirkende Federkraft und die rechte Seite durch eine rotierende Unwucht realisiert. — An sich sind physikalische Modelle für gegebene Differentialgleichungen nicht eben neu. Von den bekannten Integrieranlagen und elektrischen Kunstschaltungen abgesehen, erinnert sich Ref. eines mechanischen Hebelmodells der Firma Askania-Werke AG. zu Berlin-Friedenau, das seinerzeit zur Darstellung eines Systems von Differentialgleichungen diente, wie sie bei der Tiefensteuerung von Torpedos vorkommen. Wer es nur mit einem ganz bestimmten Typ einer Differentialgleichung zu tun hat, wird ein so spezielles Modell, wie Verf. es entwickelt hat, seiner Einfachheit und Billigkeit wegen einer Integrieranlage vorziehen. Indessen wendet sich die Entwicklung der modernen Rechengeräte von den Einzweckmaschinen ab, und es ist vielleicht nur eine Frage der Zeit, wann die modernen Geräte wie Integrieranlage und programmgesteuerte Maschine (Rechenautomat) ihre kleineren Gefährten in das Museum drängen. *Hans Bückner (Minden).*

Zeilon, Nils: Sul calcolo numerico degli autovolari. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. 6, 52—60 (1949).

Für den Fall eines symmetrischen positiv definiten regulären Kernes $K(x, y)$ wird gezeigt, wie aus einer absteigenden, gegen den ersten Eigenwert λ_1 konvergierenden Folge $\lambda', \lambda'', \dots$ (Einfachheit des Eigenwertes λ_1 vorausgesetzt) durch Bildung von $q' = \frac{\lambda' - \lambda''}{\lambda'' - \lambda'''} \dots$, ferner $\lambda(q') = \frac{q' \lambda'' - \lambda'}{q' - 1} \dots$ bei geeignetem

$0 < s < 1$ eine Folge $\mu' = \frac{1}{1-s}(\lambda(q') - s\lambda'')$, gebildet werden kann, die anfangs absteigt, dann aber dauernd ansteigt und ebenfalls gegen λ konvergiert, wodurch, wie Beispiele zeigen, sehr enge Grenzen für λ_1 angebbar werden. Die Ausgangsfolge wird in bekannter Weise von einer Näherungsfunktion v_0 für die erste Eigenfunktion φ_1 aus durch Iterationen konstruiert. *Schmeidler (Berlin).*

● Rydzik, I. M.: Tabellen für Integrale, Summen, Reihen und Produkte. 2. Aufl. Moskau, Leningrad: Staatsverlag für techn.-theor. Lit. 1948. Rb. 25,- [Russisch].

Eine vorwiegend für den Mathematiker gedachte, aber auch für den Physiker und Ingenieur brauchbare Zusammenstellung von etwa 5000 Formeln (ohne Beweise). 1. Unbestimmte Integrale, geordnet nach der Kompliziertheit des Integranden (rational, irrational, trigonometrisch, exponentiell, logarithmisch, zyklometrisch). 2. Elliptische Integrale; Integrale, deren Integranden elliptische Funktionen sind. 3. Bestimmte Integrale (was deren Existenz anlangt, stützt sich Verf. vor allem auf das de Haansche Tafelwerk, Leiden 1867). Integraldarstellungen spezieller Funktionen (hier treten auch zuweilen komplexe Integrale auf). Mehrfache Integrale. 4. Darstellung endlicher und unendlicher Summen in geschlossener Form. Reihen mit veränderlichen Gliedern, Reihendarstellungen spezieller Funktionen. 4. Zusammenstellung einiger Methoden und Sätze der Analysis, die die Anwendung der Formeln erleichtern sollen: Integrationsmethoden, näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale, mehrfache Integrale (Gaußscher Satz usw.), Konvergenzkriterien und Limitierungsverfahren, Summationsformeln. — Einige Sorge hat dem Verf., wie er selbst betont, die Stoffanordnung gemacht. Nach Ansicht des Ref. wäre es besser gewesen, die zahlreichen Formeln über spezielle Funktionen nicht allzu systematisch nach Integralen, Summen, Produkten zu trennen und vor allem die Beziehungen dieser Funktionen untereinander anzudeuten, was mit nur wenigen zusätzlichen Formeln hätte geschehen können und die Übersicht erheblich erleichtern würde. Funktionalgleichungen und Funktionalverwandtschaften (Laplacetransformationen) fehlen ganz. Trotz dieser Beanstandungen ist die Sammlung wegen ihrer reichen Materialfülle ein ausgezeichnetes Hilfsmittel.

W. Hahn (Berlin).

Lowan, Arnold N.: The computation laboratory of the national bureau of standards. Scripta math., New York 15, 33—63 (1949).

Ein Bericht über die Arbeiten des „computing laboratory“. Das Laboratorium, dessen Tätigkeit seit 1938 der Berechnung fundamentaler mathematischer Tafeln gewidmet ist, hat bisher über hundert Tafeln hergestellt. Neben Tafeln für spezielle Funktionen der mathematischen Physik wurden Tabellen zur Differenzenrechnung, zu speziellen Verfahren der numerischen Quadratur, für spezielle physikalische Untersuchungen und für militärische Zwecke aufgestellt, um nur einiges aus der umfangreichen und vielseitigen Produktion aufzuführen. — Bemerkenswert ist, daß das Laboratorium seine Arbeit ohne maschinelle Hilfsmittel begann; seit 1943 wurden Bürorechenmaschinen und seit 1945 auch die Hilfsmittel der Lochkartentechnik benutzt. Die Verwendung einer programmgesteuerten Rechenmaschine ist vorgesehen. — Ein großer Teil der Tafeln läßt sich vom Superintendent of Documents, Government Printing Office, Washington, D. C., und durch Columbia University Press beziehen.

Hans Bückner (Minden).

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen.

Wahrscheinlichkeitsrechnung:

Bartlett, M. S.: Probability in logic, mathematics and science. Dialectica, Neuchâtel 3, 104—113 (1949).

Die Definition der Wahrscheinlichkeit wird aus drei Gesichtspunkten beleuchtet. I. Beim mathematischen a) als das klassische Verhältnis der Zahl der dem Ereignis günstigen Fälle zu jener aller gleichmöglichen, b) als die relative Häufigkeit des Ereignisses innerhalb einer festen Zahl von Wiederholungen des Versuches, c) als ein vollständig additives Maß des Ereignisses innerhalb eines Ereigniskörpers. Auf eine mögliche, in neueren physikalischen Theorien zweckmäßige Verallgemeine-

rung auf negative Wahrscheinlichkeiten wurde vom Verf. in Proc. Cambridge philos. Soc. 41, 71 (1944) hingewiesen. II. Beim statistischen Standpunkt der Naturwissenschaften bevorzugt Verf. I. b) dem von Misesschen Häufigkeitsgrenzwert gegenüber. III. Innerhalb der allgemeinen Theorie der Induktion wird der subjektive Wahrscheinlichkeitsbegriff besprochen, d. h. bei der Wette auf das Erscheinen des Ereignisses das Verhältnis des Einsatzes zum Gewinn. Jeffreys gegenüber neigt Verf. mit Ramsay zur Ansicht, daß dieser „Grad des Glaubens“ selbst unter den gleichen objektiven Bedingungen subjektiv belassen werden muß. So ist sich z. B. jeder Statistiker des deduktiven Charakters seiner Überlegungen bewußt, er legt aber seinen jeweiligen Erfahrungen gemäß der zugrunde gelegten Theorie eine Glaubwürdigkeit von subjektivem Maß bei. *Szentmártony* (Budapest).

Baptist, J. H.: Le raisonnement probabilitaire. Dialectica, Neuchâtel 3, 93—103 (1949).

Verf. verteidigt die Definition der Wahrscheinlichkeit als Häufigkeitslimes, die er seiner Darstellung (Lehrbuch: Analyse des probabilités, Louvain) zugrunde gelegt hat. Die in dieser Hinsicht von den Anhängern und Gegnern der Kollektivauffassung behandelten Schwierigkeiten werden nicht berücksichtigt. *Finetti*.

Gini, Corrado: Concept et mesure de la probabilité. Dialectica, Neuchâtel 3, 36—54 (1949).

Die seit Laplace übliche Erklärung, die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses sei das Verhältnis der Zahl der ihm günstigen Fälle zur Gesamtzahl aller gleichmöglichen, ist nach Verf. nicht als Definition, sondern nur als Maß der Wahrscheinlichkeit aufzufassen. Und zwar als ein apriorisches, das nur die Rolle eines (bei Glücksspielen idealen) Näherungswertes des aposteriorischen Maßes spielt. Letzteres ist die relative Häufigkeit des Ereignisses in der Gesamtheit der Fälle, in welchen es sich einstellen kann, und wird so vom Verf. die totale Häufigkeit genannt. Jakob Bernoulli bzw. Poisson stellten obigem apriorischem Maß eine Definition als „gradus certitudinis“ bzw. „la raison que nous avons de croire qu'il aura ou qu'il a eu lieu“ voran. Sie sind also gewissermaßen „Subjektivisten“, während beim „Objektivisten“ Laplace Definition und Maß zusammenfallen. Bernoullis Satz, wonach die relative Häufigkeit eines Ereignisses in einer Anzahl von Beobachtungen bei wachsender Zahl mit einer gegen Eins strebenden Wahrscheinlichkeit seiner Wahrscheinlichkeit zustrebt, kann nach Verf. nur dann streng bewiesen werden, wenn man unter Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses seine totale Häufigkeit versteht. Dieser, in Kenntnis der Wahrscheinlichkeit die relative Häufigkeit p in einer Zahl n von Beobachtungen schätzende direkte Satz ist aber nicht äquivalent mit jenem indirekten, den Bernoulli durch zwanzig Jahre zu beweisen versuchte und der von der relativen Häufigkeit in einer Zahl von Beobachtungen auf die möglichen Werte der Wahrscheinlichkeit hätte schließen sollen. Ein Versehen, das — nach Verf. — als Erbsünde die moderne Schätzungstheorie untergräbt. Der gewünschte Satz mit dem Erwartungswert $(pn + 1)/(n + 2)$ der Wahrscheinlichkeit wurde zuerst von Laplace bewiesen. Und zwar für den Fall, daß a priori alle Wahrscheinlichkeitswerte als gleichmöglich betrachtet werden können. Diese Voraussetzung wurde 1943 vom Verf. mit G. Livada gelockert und ein allgemeinerer Erwartungswert erzielt. Eine andere Auffassung, welche das Ereignis in eine, die beobachtete umfassende Gesamtheit hineinstellt, wurde vom Verf. 1911 veröffentlicht. Nach Ansicht des Ref. sind die Überlegungen des Verf. besonders wegen ihrer ausschließlich finiten Grundeinstellung recht diskutierbar. *Szentmártony*.

Chung, Kai-Lai: Note on some strong laws of large numbers. Amer. J. Math. 69, 189—192 (1947).

Ein 1937 von Marcinkiewicz und Zygmund veröffentlichter Satz wird — im selben Geist, wie das 1946 Feller mit einigen anderen tat — folgendermaßen

verallgemeinert. Es seien bei $n = 1, 2, \dots$ die X_n unabhängige Zufallsveränderliche mit dem Mittelwert Null. Es bezeichne ferner $\psi(x) = \psi(-x) > 0$ eine \uparrow , d. h. nichtabnehmende Funktion für $x > 0$, welche der Bedingung $\psi(x)/x \downarrow$ oder $\psi(x)/x \uparrow$, aber $\psi(x)/x^2 \downarrow$ genügt und als Funktion der X_n die Erwartungswerte M_n besitzt. Bei $\sum_{n=1}^{\infty} M_n/\psi(a_n) > \infty$ ist dann die Wahrscheinlichkeit der

Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} X_n/a_n$ gleich Eins. Die Konvergenzbedingung der vorletzten Summe ist insofern die beste, als es sonst solche unabhängigen X'_n gibt, in bezug auf welche $\psi(x)$ dieselben Erwartungswerte M_n besitzt, aber die Wahrscheinlichkeit der Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} X'_n/a_n$ gleich Eins ist. Mit Hilfe des Kroneckerschen

Satzes ergeben sich so verschiedene hinreichende Bedingungen für das starke Gesetz der großen Zahlen. So ist z. B. bei $\psi(x) = |x|^p |\log |x||^{1+\varepsilon}$ mit $1 < p < 2$, $\varepsilon > 0$ und für X_n mit gleichmäßig beschränkten M_n die Wahrscheinlichkeit von $\lim_{n \rightarrow \infty} [(X_1 + \dots + X_n)/n^{1/p}] = 0$ gleich Eins. Bei der zusätzlichen Bedingung $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\psi(n) < \infty$ kann $p = 1$ gesetzt werden. *Szentmártony (Budapest).*

Erdős, P.: On the strong law of large numbers. Trans. Amer. math. Soc. 67, 51—56 (1949).

$f(x) = f(x+1)$ besitze in $(0, 1)$ den Mittelwert Null sowie die Streuung Eins und (n_k) sei eine Folge von natürlichen Zahlen mit $n_{k+1}/n_k > c > 1$. Die Frage, welche Bedingung das sog. starke Gesetz $g = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N f(n_k x)/N = 0$ für fast alle x sichert, ist von Kac, Salem, Zygmund unlängst mit den n -ten Teilsummen

$S_n(x)$ der Fourierreihe von $f(x)$ bei $\varepsilon > 0$ durch $A = \int_0^1 (f(x) - S_n(x))^2 dx = O(1/(\log n)^\varepsilon)$ beantwortet worden. Hier wird gezeigt, daß sich diese Bedingung zu der nicht endgültigen $A = O((\log_2 n)^{2+\varepsilon})$ abschwächen läßt. Wenn auch bei $n_k = 2^k$ der Grenzwert $g = 0$ sich nach Raikov für jede Funktion $f(x)$ ergibt, muß sonst der Funktion $f(x)$ irgendeine Bedingung auferlegt werden. Es wird nämlich gezeigt, daß für eine unbeschränkte Funktion $f(x)$ bei geeigneter Folge (n_k) sich $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N f(n_k x)/N = \infty$ ergibt. Die Möglichkeit von $g = 0$ bei allen beschränkten $f(x)$ bleibt offen. Bezüglich der richtigen Größenordnung von A und des Divisors in g werden Vermutungen angegeben. *Szentmártony (Budapest).*

Lévy, Paul: Sur l'aire comprise entre un arc de la courbe du mouvement brownien plan et sa corde. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 432—434 (1950).

Es bezeichne bei der (klassisch idealisierten) ebenen Brownschen Bewegung S das (nur mit Hilfe eines Zufallsintegrals angebbare zufällige) Inhaltsmaß der von einem Bogen $0 \leq t - t_0 \leq T$ und der entsprechenden Sehne bestimmten Fläche. Eine von N. Wiener 1924 angegebene Parameterdarstellung des Bogens in (auf den Mittelwert Null und die Streuung Eins reduzierten) normalen Zufallsveränderlichen ergibt für die charakteristische Funktion der Verteilung von S die Funktion $1/\text{ch}(Tz/2)$. Allgemeiner besitzt die charakteristische Funktion jeder skalaren, homogenen ganzen Funktionenfunktion zweiten Grades der Punktkoordinaten bei der ebenen Brownschen Bewegung die Gestalt $\Pi(1 - iz/\lambda_n)^{-1/2}$. Die entsprechenden Verteilungsgesetze sind alle unbeschränkt teilbar. Für den Logarithmus der charakteristischen Funktion gibt Verf. in zwei Fällen dementsprechend die kanonische Darstellung an. — In der Zerlegung von S in Quadrate auf S. 434 ist $2n + 1$ an Stelle von $n + \frac{1}{2}$ zu setzen. *Szentmártony (Budapest).*

Darmois, G.: Sur certaines formes des liaisons de probabilité. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci., Nr. 13 (Lyon 28. 6.—3. 7. 1948. Le calcul des probabilités et ses applications), 19—21 (1949).

Es seien $A(x)$, $B(y)$, $F(x, y)$ die Verteilungsfunktionen von X , Y , $[X, Y]$: wenn X , Y voneinander abhängig sind, ist $\Delta = F - AB$ nicht überall null. Verf. untersucht, ob Δ überall ≥ 0 sein kann; tatsächlich ergibt sich diese Möglichkeit, und zwar z. B. in folgenden Fällen: $X = U + W$, $Y = V + W$ (U , V , W voneinander unabhängig); $X = W$, $Y = V + W$ (Grenzfall $U = 0$); oder allgemeiner $X = f(U, W)$, $Y = g(V, W)$, wenn $f(\xi, \eta) = \text{konst.}$ (sowie $g(\xi, \eta) = \text{konst.}$) eine monotone Abhängigkeit zwischen ξ und η festlegt. P. Lévy bemerkt, daß sich dieselbe Möglichkeit auch bei beliebigen A und B ergibt. *Finetti.*

Lévy, Paul: Processus doubles de Markoff. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci., Nr. 13 (Lyon 28. 6. — 3. 7. 1948. Le calcul des probabilités et ses applications), 53—59 (1949).

Es sei jedem Punkt M der Ebene eine zufällige Größe $X(M)$ zugeordnet; man hat Entartung, wenn der Wert von X in einem Punkt M nicht mehr vom Zufall abhängt, falls \bar{X} überall mit Ausnahme einer Umgebung von M bekannt ist; man hat einen doppelten Markoffschen Prozeß, wenn für jede Zerlegung der Ebene in zwei Teile R_1 und R_2 mittels einer Linie \mathcal{Q} die Werte von X in R_1 nicht mehr von jenen in R_2 abhängen, sobald die Werte auf \mathcal{Q} bekannt sind. An Hand einiger Beispiele [teilweise schon veröffentlicht: s. C. r. Acad. Sci., Paris 220, Séance 26. 3. 1945 und dies. Zbl. 30, 166, 32, 291] zeigt Verf., daß nicht entartete doppelte Markoffsche Prozesse sich tatsächlich konstruieren lassen, daß es aber unvermeidbar scheint, daß sie der Entartung ähnliche Eigenschaften aufweisen. *Finetti.*

Ville, J. A.: Fonctions aléatoires et transmission de l'information. Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci., Nr. 13 (Lyon 28. 6 — 3. 7. 1948. Le calcul des probabilités et ses applications), 115—119 (1949):

Statistik:

Cansado Maceda, E.: Charakteristische Funktionen der Pearsonschen Verteilungen. II. Rev. mat. Hisp.-Amer., IV. S. 8, 202—225 (1948) [Spanisch].

Fortsetzung einer bereits besprochenen Arbeit (dies. Zbl. 38, 195). Verf. behandelt die charakteristischen Funktionen der Pearson-Typen IV, V, VI, VII und XI. Für V und VII ergeben sich Ausdrücke in Zylinderfunktionen, und für die anderen Typen müssen konfluente hypergeometrische Funktionen verwendet werden. Verschiedene Spezialfälle, unter anderem die t -Funktion von Student und die Cauchy'sche Verteilung, werden angeführt. — Verf. gibt auch einen Weg an, wie man hoffen könnte, die charakteristischen Funktionen aus der Differentialgleichung direkt abzuleiten, der die Pearsonkurven genügen. Er stellt aber fest, daß auf diese Weise keine allgemeinen Resultate abgeleitet werden können. *S. Vajda* (Epsom).

Wilks, S. S.: Order statistics. Bull. Amer. math. Soc. 54, 6—50 (1948).

Die Ordnungsstatistik behandelt die statistischen Schlüsse in den Fällen, wo eine Stichprobe X_1, \dots, X_n aus einer Gesamtheit vorliegt, deren Verteilungsfunktion unbekannt ist. Die Arbeit gibt nach einer kurzen historischen Einleitung einen Abriss derjenigen dieser Schlußverfahren, bei denen die Summenfunktion $F(x) = \Pr(X \leq x)$ als stetig vorausgesetzt wird; mitunter wird noch Stetigkeit der Wahrscheinlichkeitsdichte verlangt. Grundlage der Schlüsse ist die nach Größe (also unabhängig von der Reihenfolge beim Ziehen) angeordnete Reihe $X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ der Stichprobenwerte: $X_{(r)}$ heißt r -ter Anordnungswert (order statistic). Ist die Verteilungsfunktion bis auf unbekannte Parameter vorgegeben, so sind die Schlüsse der Ordnungsstatistik zwar nicht so voll wirksam (efficient) wie die an die Gestalt der Verteilungsfunktion angepaßten Schlüsse; sie sind jedoch wegen ihrer einfacheren Berechenbarkeit in den Fällen vorzuziehen, wo der Stichprobenumfang leicht vergrößert werden kann. — Als Grundproblem wird genannt: Sei X eine k -dimensionale statistische Größe mit der Summenfunktion

$$F(x_1, \dots, x_k) = \Pr(X_v \leq x_v)$$

und sei $X^{(1)}, \dots, X^{(n)}$ eine Stichprobe. Gesucht wird ein von den $X^{(n)}$ abhängiger Bereich S_k des k -dimensionalen Raumes so, daß $C_k = \Pr(X \in S_k)$ eine von $F(x)$ unabhängige Verteilungsfunktion hat. C_k heißt Bedeckung (coverage) von S_k und wird verteilungsfrei (distribution-free) genannt. Problem und Bezeichnung ist verallgemeinerbar auf simultane Betrachtung mehrerer S_k . — Verteilungsfrei sind die Bedeckungen der von den $X_{(r)}$ einer eindimensionalen Größe X gebildeten Intervalle. Aus ihrer gemeinsamen Verteilungsfunktion ergeben sich

$$\Pr(X_{(i)} < \xi_p < X_{(j)})$$

für die p -Quantile ξ_p , d. h. $F(\xi_p) = p$, in Form von unvollständigen Betafunktionen: Vertrauensgrenzen für ξ_p bei beliebigem p ; desgleichen Duldungsgrenzen L_1 und L_2 mit

$$\Pr([F(L_2) - F(L_1)] > \beta) = \alpha.$$

— Ist $F(x)$ bekannt, so kann man vom Bedeckungsmaß $\Delta F(x)$ der Intervalle zum geometrischen Maß zurücktransformieren und erhält so z. B. die Summenfunktion für die $X_{(r)}$; insbesondere ist $F^n(x)$ die Summenfunktion für $X_{(n)}$. Die gemeinsame Verteilungsfunktion der $X_{(r)}$ liefert entsprechend z. B. die Verteilungsfunktion für Weite $(X_{(n)} - X_{(1)})$ und Mittelpunkt $(X_{(1)} + X_{(n)})/2$ der Stichprobe. Bei geeigneten Annahmen über das Verhalten von $F(x)$ bei großen x ergeben sich asymptotische Ausdrücke für die Summenfunktion der $X_{(r)}$ und von Weite und Mittelpunkt bei großen n . — Setzt man $F_n(x) = 0$ für $x < X_{(1)}$, $F_n(x) = i/n$ für $X_{(i)} < x < X_{(i+1)}$, $F_n(x) = 1$ für $x > X_{(n)}$, so ist $F_n(x)$ eine Approximation für das unbekannte $F(x)$. Es gilt: $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{\sup |F(x) - F_n(x)| \leq \lambda/n^{1/2}\} = \Phi(\lambda)$ mit

$$\Phi(\lambda) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k \cdot \exp(-2k^2 \lambda^2).$$

Damit ist $F_n(x) \pm \lambda/n^{1/2}$ ein Vertrauensgürtel für $F(x)$. Für endliche n ist die Berechnung des exakten Vertrauensgürtels sehr umständlich. — Für den Fall eines mehrdimensionalen X werden verschiedene Verfahren zur Konstruktion von Bereichen S_k mit verteilungsfreien Bedeckungen und ihre Anwendung auf eine geringer wirksame Schätzung des Korrelationskoeffizienten in einer zweidimensionalen normalen Gesamtheit angeführt. — Der letzte Teil der Arbeit ist den Tests gewidmet, die auf der Methode der Aleatorisierung (method of randomization) beruhen: Ist $\{\alpha_i\} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ eine Permutation der Zahlen $\{1, \dots, n\}$, so ist

$$\Pr(X_{\alpha_1} < \dots < X_{\alpha_n}) \equiv \Pr(S_{\{\alpha_i\}}) = 1/n!$$

unabhängig von der Verteilungsfunktion; durch Zusammenfassung geeigneter solcher $S_{\{\alpha_i\}}$ kann daher ein verteilungsfreies Verwerfungsgebiet für Tests bestimmt werden. Auf Testung der Hypothese, daß das unbekannte $F(x)$ einer gegebenen Klasse angehört, kann diese Methode jedoch nicht angewandt werden. Dagegen lassen sich Anordnungsbeziehungen zwischen verschiedenen Stichproben aus der gleichen Gesamtheit testen. Dies liefert Tests für die Hypothese, daß zwei Stichproben aus der gleichen Gesamtheit sind, oder daß bei Ziehung der zweiten Stichprobe eine konstante Verschiebung (slippage) in x -Richtung stattfand. Die Frage der Machtfunktion ist hier noch nicht voll gelöst, wie auch die Frage, ob der Test unverfälscht ist. Weiter erhält man Tests für die Unabhängigkeit der Ziehungen in einer Stichprobe. — Auch die Streuungsanalyse kann mit der Ordnungstatistik behandelt werden, indem man in einer Ergebnismatrix nur die Anordnungen in den Reihen betrachtet und nach der Unabhängigkeit dieser Anordnungen testet. — Bei zweidimensionalem X kann die Hypothese $F(x, y) = F(x) \cdot F(y)$ getestet werden, indem man geeignete Verwerfungsbereiche durch Ziehung von achsenparallelen Geraden durch einige Ergebnispunkte bildet. — Bezüglich der Beweise wird auf ein Literaturverzeichnis verwiesen, das 90 Arbeiten enthält. Wegen dieser großen Zahl verbot sich die Angabe von Autoren in diesem Referat.

Hans Richter (Haltingen/Baden).

Hastings jr., Cecil, Frederick Mosteller, John W. Tuckey and Charles P. Winsor: Low moments for small samples: A comparative study of order statistics. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 18, 413—426 (1947).

Für die Normalverteilung N , die Rechteckverteilung U und die spezielle Verteilungsfunktion S der Variablen $x(u) = (1-u)^{-1/10} - u^{-1/10}$, wo u in $0 \leq u \leq 1$ konstante Wahrscheinlichkeitsdichte hat, wurden die Mittelwerte, Streuungen und Kovarianzen der Ordnungswerte $X_{(r)}$ (order statistic) [vgl. vorsteh. Ref.] einer Stichprobe des Umfanges $n \leq 10$ numerisch berechnet. S soll als Beispiel dienen für eine Verteilungsfunktion mit langen Enden (tails), bei der in Gegensatz zu N die gesuchten Größen noch mit erträglichem Rechenaufwand ermittelt werden können. — Für die Rechteckverteilung lassen sich alle Mittelwerte und Varianzen explizit angeben. Faßt man bei beliebiger Verteilungsfunktion die Zufallsgröße x auf als Transformierte einer anderen u mit Rechteckverteilung, $x = f(u)$, wobei den $X_{(r)}$ nun die Ordnungswerte $U_{(r)}$ entsprechen, so liefert die Anwendung von f auf die Mittelwerte der $U_{(r)}$ einerseits und die Linearisierung von f in der Umgebung dieser Mittelwerte andererseits für große n asymptotische Formeln für resp. Mittelwerte und Varianzen der $X_{(r)}$. Auch diese asymptotischen Formeln wurden ausgewertet (AN bei N und AS bei S) unter Multiplikation mit $(n+2)/n$ zur Erzielung einer besse-

ren Übereinstimmung bei N und S . — **Tafel I:** Mittelwert und Standardabweichung der $X_{(r)}$ für U, S, N, AN und AS auf 5 Dezimalen. **Tafel II:** Varianzen und Kovarianzen bei N und AN auf 2 Dezimalen. **Tafel III, IV und V** das Entsprechende für U, S und AS auf 5 Dezimalen. **Tafel VI:** Korrelationskoeffizienten für U, N und S auf zwei Dezimalen. — Gültigkeit der asymptotischen Formeln: Bei $n \leq 10$ für die Mittelwerte nicht brauchbar; bei $n \geq 8$ ausreichend für Varianzen und Kovarianzen von N und bei den zentraleren Ordnungswerten von S ; Korrelationskoeffizienten sind ziemlich unabhängig von der Verteilung. — Durch das vorliegende Zahlenmaterial wird die Anwendung der auf der Ordnungstatistik beruhenden ineffizienten Methoden auf Verteilungsfunktionen mit unbekanntem Parameter wesentlich erleichtert. *H. Richter.*

Smith, John H.: Estimation of linear functions of cell proportions. *Ann. math. Statist., Baltimore Md.* **18**, 231—254 (1947).

L'A. studia gli „stimatori“ che sono funzioni lineari dei dati sperimentali che formano il campione e sviluppa la Sua analisi in rapporto ai tre metodi; dei minimi quadrati, del minimo di χ^2 , e del massimo di verosimiglianza. *G. Pompilj* (Roma).

Halmos, Paul R. and L. J. Savage: Application of the Radon-Nikodym theorem to the theory of sufficient statistics. *Ann. math. Statist., Baltimore Md.* **20**, 225—241 (1949).

La Memoria rappresenta un felice avvicinamento di pure teorie matematiche con interessanti problemi statistici. In tal modo gli AA. riescono a cogliere l'essenza del concetto di „stimatore sufficiente“, liberandolo da ogni concetto estraneo, quale quello di dimensionalità, differenziazione, ecc. ecc. *G. Pompilj* (Roma).

Rao, C. Radhakrishna: Large sample tests of statistical hypotheses concerning several parameters with applications to problems of estimation. *Proc. Cambridge philos. Soc.* **44**, 50—57 (1948).

Verf. bespricht Tests für einfache und zusammengesetzte Hypothesen, welche auf der Verwendung von quadratischen Formen in $\Phi_i = \frac{\partial \log L}{\partial \theta_i}$ beruhen, wobei L die „likelihood“ bedeutet und die Parameter θ_i Beschränkungen unterliegen können. Es werden auch Anwendungen auf Schätzungsprobleme angedeutet. Als Beispiel wird die Übereinstimmung der Genenhäufigkeit in zwei Stichproben untersucht. *Vajda* (Epsom, England).

Arrow, K. J., D. Blackwell and M. A. Girshick: Bayes and minimax solutions of sequential decision problems. *Econometrica*, Chicago **17**, 213—244 (1949).

Es sind k Hypothesen H_i gegeben, die mit a priori-Wahrscheinlichkeiten g_i gelten. Es ist auch der Verlust bekannt, den man erleidet, wenn man anstatt der richtigen Hypothese H_i die Hypothese H_j annimmt, sowie der Preis von n Beobachtungen. Der Statistiker hat die Aufgabe, einen Test und ein Kriterium zu wählen, nach dem er entscheidet, ob er eine der Hypothesen annehmen oder weitere Beobachtungen machen will, wenn bereits n ($= 1, 2, \dots$) Beobachtungen vorliegen. Eine Wahl, welche die Summe des erwarteten Verlustes aus unrichtigen Entscheidungen zuzüglich des Erwartungswertes des Preises für die Beobachtungen zu einem Minimum macht, heißt eine „Bayes-Lösung“. Verf. beweisen, daß es für jeden Stichprobenumfang N konvexe Gebiete S_j ($j = 1, 2, \dots, k$) gibt, derart, daß wenn der Vektor, dessen Komponenten die a posteriori-Wahrscheinlichkeiten der k Hypothesen darstellen, in S_j liegt, das beste Verfahren in der Annahme von H_j besteht, während die Beobachtungen fortzusetzen sind, falls der Vektor in keines dieser Gebiete zu liegen kommt. Für $k = 2$ und wenn der Preis eine lineare Funktion der Anzahl der Beobachtungen ist, wird dieser Test mit Walds Folgetest des Wahrscheinlichkeitsverhältnisses identisch. Dieser Test hat die weitere wünschenswerte Eigenschaft, daß er für gegebene Wahrscheinlichkeiten einer Fehlentscheidung den Erwartungswert der Anzahl von Beobachtungen zu einem Minimum macht, und zwar gleichgültig, ob H_1 oder H_2 zutrifft. — Die bisher beschriebenen Ergebnisse setzen die a priori-Verteilung der Hypothesen als bekannt voraus. Falls dies nicht zutrifft, wird eine „Minimax-Lösung“ angegeben, welche dadurch definiert ist, daß sie den größten Erwartungswert des möglichen Verlustes (je nach den Werten der g_i) zu

einem Minimum macht. — Einige Resultate sind schon früher von Wald und Wolfowitz mitgeteilt worden. *S. Vajda* (Epsom, England).

Madow, William G.: On the theory of systematic sampling. II. Ann. math. Statist., Baltimore Md. 20, 333—354 (1949).

In einer früheren Arbeit [W. G. Madow and L. H. Madow, Ann. math. Statist., Baltimore Md. 15, 1—24 (1944)] war erwähnt worden, daß es in Untersuchungen mit geschichteten Stichproben vorteilhaft ist, zwischen den Schichten negative Korrelationen zu haben. Nunmehr wird folgendes bewiesen: Eine hinreichende

Bedingung dafür, daß $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^k a_{ij} w_i z_j > \sum_{i=1}^n a_{ii} w_i \left(w_i, z_j > 0, \sum_1^n w_i = \sum_1^k z_j = 1 \right)$,

ist $a_{ij} \geq a_{ii}$ (für alle i, j), wenn $n \leq k$, und $a_{ij} + a_{ji} \geq a_{ii} + a_{jj}$ (für alle i, j), wenn $n = k$. (Die Formulierung und der Beweis enthalten einige verwirrende Druckfehler.) Wenn dann $a_{ij} = x_i y_j$ und $z_i = w_i = p_i$, dann bedeutet dies, daß $(x_i - x_j)(y_i - y_j) \leq 0$ hinreicht für das Negativsein der Korrelation

$\sum_i p_i x_i y_i - \sum_{i,j=1}^n p_i p_j x_i x_j$. Es wird auch gezeigt, daß eine hinreichende Bedingung für

$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} w_i z_j \leq 0$ durch $a_{ij} - a_{i+1,j} - a_{i,j+1} + a_{i+1,j+1} \leq 0$ gegeben ist,

falls $\sum_{i=1}^s w_i \geq 0, \sum_{j=1}^{s'} z_j \geq 0$ ($s = 1, \dots, n-1; s' = 1, \dots, m-1$) und

$\sum_{i=1}^n w_i = \sum_{j=1}^m z_j = 0$. Zum Schlusse werden die Ergebnisse der Arbeit auf systematische Haufen-Stichproben angewendet, und es werden Bedingungen dafür angeführt, daß systematische Stichproben zu genaueren Resultaten führen als zufällige.

S. Vajda (Epsom, England).

Neyman, J. and Elizabeth L. Scott: Consistent estimates based on partially consistent observations. Econometrica, Chicago 16, 1—32 (1948).

x_1, x_2, \dots sei eine Folge nicht notwendig eindimensionaler, unabhängiger zufälliger Variabler, deren Verteilungsgesetze von denselben endlich vielen Parametern θ_k abhängen mögen. Das Problem, konsistente Schätzfunktionen zu finden, besteht darin, Funktionen $T_k(x_1, \dots, x_n)$ anzugeben, welche stochastisch gegen θ_k streben für $n \rightarrow \infty$. Falls alle θ_k zumindest in den Verteilungen unendlich vieler x_i auftreten, sollen die x_i selbst konsistent heißen. Verff. betrachten folgendes Problem: Die Anzahl der auftretenden Parameter ist unendlich und zerfalle in 2 Klassen: Die Parameter θ_k , welche mindestens in unendlich vielen Verteilungsgesetzen zugleich und in endlicher Anzahl auftreten, und die der zweiten Klasse angehörigen übrigen Parameter ξ_m , welche nur in endlich vielen Verteilungen auftreten. Die Variablen dieser Art sollen teilweise konsistent, die θ_k struktural und die ξ_m inzidental heißen. O. B. d. A. kann angenommen werden, daß die θ_k in den Verteilungen aller x_i vorkommen, weiter möge gelten, daß für alle m ξ_m genau in der Verteilung von x_m auftritt, und sonst kein inzidentaler Parameter. Es sollen nun bezüglich der θ_k konsistente Schätzfunktionen konstruiert werden. Zunächst wird an Beispielen, welche der Physik und Astronomie entnommen sind, die praktische Bedeutung einer solchen Fragestellung gezeigt. Es scheint naheliegend, sich zur Lösung des Prinzips der „maximum likelihood“ (P. d. m. l.) zu bedienen, welches bekanntlich im Falle konsistenter Variabler konsistente, asymptotisch-wirksame Schätzfunktionen liefert (vgl. M. G. Kendall, The advanced theory of statistics, Vol. II, London 1946, p. 15ff.). Es ist nun interessant, daß Verff. an zwei Beispielen nachweisen, daß im Falle teilweise konsistenter Variabler die durch das P. d. m. l. gewonnenen Schätzfunktionen nicht notwendig konsistent sind, und wenn sie es sind, nicht notwendig wirksam sein müssen. Nun wird eine Methode angegeben, um unter den o. a. Voraussetzungen das gestellte Problem zu lösen. Es handelt sich hierbei um die Aufstellung gewisser Funktionen der zufälligen Variablen x_1, x_2, \dots, x_n und der Parameter θ_k , die eine Reihe von Voraussetzungen (V) erfüllen müssen, welche jedoch zu umfangreich sind, um hier wiedergegeben zu werden. Es scheint auch kein Konstruktionsprinzip derzeit zu existieren, um die Funktionen aufzustellen. Ein etwas speziellerer Fall würde die Lösung folgenden Problems benötigen: $p(x, \xi)$ sei eine nichtnegative Funktion der n -dimensionalen Variablen x , so daß für $a \leq \xi \leq b$ $\int p dx = 1$ identisch in ξ gilt. Es sind alle von ξ unabhängigen Funktionen $\Phi(x)$ aufzustellen, für welche $\int \Phi p dx \equiv 0$ unabhängig von ξ gilt. Die Lösung dieses Problems ist von der Dimen-

sion n wesentlich abhängig. [Für $n = 1$ gibt es nur die Lösung $\Phi \equiv 0$, nicht aber für $n \geq 2$. Für $n = 1$ vgl. A. Wald, „Note on a Lemma“, Ann. math. Statist., Baltimore Md., 15, 330—333 (1944).] Setzt man die Erfüllbarkeit von (V) voraus, dann gelangt man durch eine Modifikation des P. d. m. l. zum Ziel. Der letzte Teil der Arbeit ist der Abschätzung der asymptotischen Streuung der Schätzfunktion gewidmet. Die Streuungen aller konsistenten Schätzfunktionen liegen oberhalb einer nur von der Anzahl der Variablen und deren Verteilungsfunktionen abhängigen Schranke (vgl. z. B. H. Cramer, Mathematical methods of statistics, Princeton 1946, p. 480). Konsistente Variable vorausgesetzt, nimmt die asymptotische Streuung der mittels des P. d. m. l. gewonnenen Schätzfunktionen die untere Grenze an. Hier braucht dies nicht der Fall zu sein. *Schmetterer (Wien).*

Carter, A. H.: The estimation and comparison of residual regressions where there are two or more related sets of observations. Biometrika, Cambridge 36, 26—46 (1949).

Eine statistische Gesamtheit \mathcal{G} sei untergeteilt nach Varietäten (Behandlungsarten o. ä.), vorderer Index $i = 1, \dots, p$, und nach Standorten (Raum- oder Zeitpunkte der Beobachtung o. ä.), hinterer Index $j = 1, \dots, n$; also $\mathcal{G} = \sum_i \sum_j \mathcal{G}_{ij}$. Jedes Element von \mathcal{G} trägt das

Merkmal y , das in linearer Regression steht zu den unabhängigen Merkmalen x^u , $u = 1, \dots, q$. Die unbekannten Regressionskoeffizienten seien nur von i abhängig; dagegen mögen Varietät und Standort unabhängig voneinander Verschiebungen γ_i und α_j der Konstante der Regressionsgleichung bedingen. So entsteht das Modell für ein Element aus \mathcal{G}_{ij} : $y_{ij} = \sum_u \beta_i^u x_{ij}^u + \gamma_i + \alpha_j + \varepsilon_{ij}$,

wo die ε_{ij} unabhängige, normal verteilte Zufallsgrößen mit konstanter unbekannter Varianz σ^2 sind. Gegeben sei eine Stichprobe, die aus jedem \mathcal{G}_{ij} je ein Element enthält. Gesucht werden Schätzungen für die β_i^u , γ_i , α_j und σ^2 , und es sollen Tests aufgestellt werden für Relationen vom Typus $\beta_i^u = \beta^u$ und für die Signifikanz der Differenzen $\beta_i^u - \beta_m^u$. — Vermöge Einführung von Scheinvariablen (dummy variates) wird die Aufgabe zu einem Spezialfall eines Theorems von St. Kołodziejczyk [Biometrika, Cambridge 27, 161—190 (1935); dies. Zbl. 11, 220], wo die Testung der Hypothese H behandelt ist, daß unter Voraussetzung des Bestehens einer linearen Regression eines y von x^1, \dots, x^t gewisse r Stück der Regressionskoeffizienten gleich sind, und wo gezeigt wird, daß die Quadratsumme S_0 der scheinbaren Fehler, berechnet nach der Methode der kleinsten Quadrate ohne Verwendung von H , und die Differenz von S_0 gegen die entsprechende Quadratsumme S_r bei Berechnung unter Verwendung von H unabhängig wie $\sigma^2 \chi^2$ verteilt sind mit resp. $(n-t)$ und $(r-1)$ Freiheitsgraden, wenn n Beobachtungen vorliegen. Die Anwendung dieses Theorems liefert die gesuchten exakten Tests für verschiedene Hypothesen über die Beziehungen zwischen den β_i^u und Schätzungen derselben. — Anschließend wird spezialisiert auf die Fälle $q = 1$; $p = 2$ mit beliebigem q ; $p = 2$ nebst $q = 1$, und die entsprechenden Formeln im Falle $\alpha_j \equiv 0$ (Unabhängigkeit der auf die Varietäten bezüglichen Unterstichproben) werden zum Vergleich angeführt. — Vergleich der Problemstellung mit der in einer Arbeit von F. Yates [Tests of significance of the differences between regression coefficients derived from two sets of correlated variates. Proc. R. Soc. Edinburgh 59, 184—194 (1939); dies. Zbl. 23, 150], wo $p = 2$ ist, jedoch eine Korrelation zwischen den ε_{ij} zugelassen ist. — Zwei ausführlich durchgerechnete numerische Beispiele. *Hans Richter (Haltingen/Baden).*

Nair, K. R. and C. R. Rao: Confounding in asymmetrical factorial experiments. J. R. statist. Soc., London, Ser. B 10, 109—131 (1948).

Der in der vorliegenden Arbeit behandelte Gegenstand interessiert in erster Linie den im biologischen und landwirtschaftlichen Versuchswesen tätigen mathematischen Statistiker. In ausführlicher Darstellung wird unter Hinweis auf die bisherigen einschlägigen Arbeiten von R. A. Fisher, Yates, Li u. a., so auch der beiden Verf., eine ins Einzelne gehende Entwicklung der kombinatorischen Probleme sowie der statistischen Analyse („analysis of variance“) kennzeichnender „factorial experiments“ gegeben. — Als besonders wertvoll dürfte die Ergänzung der zunächst ganz allgemein gehaltenen Überlegungen der Verf. durch zahlenmäßig durchgeführte Konstruktionen der entsprechenden Versuchsplanungen anzusehen sein. *G. Wünsche.*

Smith, C. A. B. and H. O. Hartley: The construction of Youden squares. J. R. statist. Soc., London, Ser. B. 10, 262—263 (1948).

Fisher und Yates leiten in ihren bekannten „Statistical Tables“ die Youden-Quadrate aus einem Satz sogenannter „balanced incomplete blocks“, in denen die Zahl der Variablen mit derjenigen der Blocks übereinstimmt, ab und stellen fest, daß es „in allen praktisch wichtigen Fällen“ möglich ist, ein Youden-Quadrat aus einem „incomplete block“ zu erzeugen. — In der vorliegenden Note wird nun ge-

zeigt, daß durch Konversion aus einem „incomplete block“ stets ein Youden-Quadrat gewonnen werden kann, und es wird gleichzeitig ein allgemeines Verfahren zur Erzeugung dieser Quadrate mitgeteilt. *G. Wünsche (München).*

Whitfield, J. W.: Intraclass rank correlation. *Biometrika*, Cambridge **36**, 463—466 (1949).

Stange, K.: Das Bildungsgesetz für die Fehlerformeln beim Ausgleichen von fehlerhaften Meßreihen mit Hilfe ganzer rationaler Funktionen wachsender Ordnung. *Z. angew. Math. Mech.* **29**, 225—238 (1949).

Die beim Ausgleichen von Meßwerten mit Hilfe von endlichen Potenzreihen geltenden Gesetze für die Fortpflanzung der Meßfehler und für die Fälschung der Funktionswerte werden in „Determinantenform“ aufgestellt. Indem man diese Determinanten nach fallenden Potenzen der Punktzahl n entwickelt, findet man äußerst einfache, für „große“ Punktzahlen n gültige „asymptotische“ Gesetze. Diese sind bereits für $n = 7$ brauchbar. (Autoreferat.) *Nyström (Helsinki).*

Berkson, Joseph: Minimum χ^2 and maximum likelihood solution in terms of a linear transform, with particular reference to bio-assay. *J. Amer. statist. Assoc.* **44**, 273—278 (1949).

Sind n Wertepaare x_i, y_i durch eine Kurve der Form $y = F(x, \alpha, \beta)$ mit unbekannten Parametern α, β auszugleichen, so sucht der Empiriker häufig die Variablen x und y oder eine einzige von ihnen derart zu transformieren, daß die transformierten Variablen durch eine lineare Relation verknüpft sind, und dieselbe durch Anwendung des Prinzips der kleinsten Quadrate auf die transformierten empirischen Wertepaare zu bestimmen. C. J. Bliss und R. A. Fisher [The calculation of the dosage mortality curve. *Ann. appl. Biology* **22**, 134 (1935)] bestimmten, an das Ausgleichsproblem der Dosis-Wirkungskurven anknüpfend, die Parameter α, β der Ausgleichsfunktion

$$F = \int_{-\infty}^{\alpha + \beta x} \exp(-t^2/2) dt / \sqrt{2\pi}$$

der ursprünglichen Variablen so, daß, wenn diese binomial verteilt ist, α, β dem Prinzip der Maximum-likelihood entspricht. Nachdem das analoge Problem vom Verf. [Application of the logistic function to bio-assay. *J. Amer. statist. Assoc.* **39** 357 (1944)] für die logistische Kurve und von D. J. Finney [The principles of biological assay. *J. statist. Soc. Suppl.* **9**, 46—91 (1947)] für andere Ausgleichsfunktionen gelöst worden ist, entwickelt Verf. eine auf sukzessiven Approximationen aufbauende Methode zur Bestimmung der Kurvenparameter α, β auf Grund der Forderung, daß χ^2 minimal resultiere. Verteilt sich die auszugleichende Variable normal, so deckt sich die Lösung mit der nach dem Maximum-likelihood-Prinzip gewonnenen, verteilt sich jene hingegen binomial, so ergeben sich für die beiden Forderungen verschiedene Lösungen. Außer dem Integral der Normalverteilung und der logistischen Kurve werden noch die Ausgleichsfunktionen $\sin^2(a + bx)$ und $\exp(a + bx)$ betrachtet. *M. P. Geppert (Bad Nauheim).*

Biomathematik. Versicherungsmathematik. Finanzmathematik:

Delaporte, P.: Sur une utilisation systématique de la statistique mathématique en analyse factorielle. *Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci.*, Nr. **13** (Lyon 28. 6.—3. 7. 1948. Le calcul des probabilités et ses applications), 101—104 (1949).

In der experimentellen Psychologie (und ähnlich in der Biometrie) wird das durch Tests ermittelte Maß einer Eigenschaft in zwei Teile zerlegt, einen Allgemeinfaktor, der allen Eigenschaften des betreffenden Individuums zukommt, und in einen für die Eigenschaft charakteristischen Spezialfaktor. Letztere sollten von

ersterem statistisch unabhängig sein; da das praktisch nicht erreichbar ist, sind weitere Faktoren einzuführen, die Gruppenfaktoren, die einer Gruppe von Eigenschaften zukommen. Das Maß der Eigenschaften ist dann eine lineare Funktion dieser dreierlei Faktoren, die untereinander statistisch unabhängig sind. Verf. untersucht die Frage, ob eine solche Darstellung möglich ist, und ermittelt den Korrelationskoeffizienten einer Eigenschaft in bezug auf den Generalfaktor und anschließend in derselben Weise in bezug auf die Gruppenfaktoren. *Härten.*

Haldane, J. B. S.: Some statistical problems arising in genetics. *J. R. statist. Soc., Ser. B*, London **11**, 1—14 (1949).

Zur Eröffnung einer Diskussion über die Tragweite statistischer Problemstellungen in der Genetik skizziert Verf. die Grundgedanken einiger vom Verf., R. A. Fisher, Wright, Malécot u. a. untersuchten Fragen: u. a. Korrektur der Familien- und Probanden-Auslese bei Schätzung der Rezessivenwahrscheinlichkeit aus menschlichem Beobachtungsmaterial (gestützte binomische Verteilung und Maximum-likelihood-Prinzip); Prüfung der Abhängigkeit der Rezessivenwahrscheinlichkeit von der Ordnungszahl der Geburt in der Geschwisterreihe (Erzeugende Funktion und Kumulanten der Verteilung der Summe der Geburtennummern der Rezessiven); Bestimmung der Relativzahl u_n des Gens A in der n -ten Generation einer panmiktischen Bevölkerung ($u_n^2 A A : 2u_n A a : 1aa$) bei Selektion aus der Differenzengleichung

$$u_{n+1} = (Fu_n^2 + u_n)/(u_n + f),$$

anknüpfend an Fishers allgemeine Lösung der bei Problemen des zufälligen Überlebens von Genen auftretenden Funktionalgleichungen; Untersuchung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Genhäufigkeit einer Bevölkerung, und zwar bei seltenen Genen Wahrscheinlichkeit der Genanzahl (mittels erzeugender Funktion), die auf Pearson-Typ III-Verteilung bzw. Gram-Charlier-Typ B-Reihen führt, bei häufigen Genen kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung der Genhäufigkeit; Inzucht (Matrizenkalkül); Vererbung quantitativer Merkmale (Korrelationsrechnung). In der daran anknüpfenden Diskussion machen R. A. Fisher, Penrose, Owen, Fraser Roberts, Irwin, C. B. Smith und Finney ergänzende Bemerkungen. *M. P. Geppert.*

Rao, C. Radhakrishna: The utilization of multiple measurements in problems of biological classification. *J. R. statist. Soc., London, Ser. B*, **10**, 159—203 (1948).

Der Aufsatz beschäftigt sich mit zwei miteinander verwandten, für die Anthropologie und systematische Biologie charakteristischen, aber auch in der Psychologie und anderen empirischen Wissenschaften auftretenden statistischen Problemen: auf Grund von p bei jedem Individuum feststellbaren Meßgrößen einerseits jedes Individuum einer von mehreren durch ihre entsprechenden Parameter vorgegebenen, möglichen Gruppen einzuordnen, andererseits die Gruppen nach ihrer größeren oder geringeren Ähnlichkeit miteinander in geeigneten Konstellationen zu klassifizieren. Zur Lösung des erstgenannten Problems im Falle von zwei Gruppen hat B. L. Welch [Biometrika, Cambridge **31**, 218—220 (1939); dies. Zbl. **22**, 63] im p -dimensionalen Stichprobenraum „bestmögliche“ Bereiche abgegrenzt, derart daß die innerhalb derselben fallenden Individuen mit vorgegebenem Sicherheitsgrad (Konfidenzkoeffizienten) eindeutig einer der beiden Gruppen zugeordnet werden. Diese Bereiche werden durch Flächen konstanten Likelihood-Verhältnisses abgegrenzt. Folgen die p Meßvariablen in den beiden Gruppen zwei p -dimensionalen Normalverteilungen mit gleicher Dispersionsmatrix, so führt die Gleichung der Grenzflächen auf die von R. A. Fisher [The use of multiple measurements in taxonomic problems. *Ann. Eugenics* London **7**, 179 (1936)] eingeführte Unterscheidungsfunktion (discriminant function). Als Spezialfall behandelt Verf. die Aufteilung einer eindimensionalen Stichprobe in zwei Normalverteilungen mit verschiedenen Mittelwerten μ_1, μ_2 , aber gleicher Streuung σ ; die vier unbekannten Parameter μ_1, μ_2, σ und q (= Mischungsverhältnis der ersten Gruppe im Kollektiv) werden nach zwei verschiedenen Methoden bestimmt: einmal durch Anwendung der Momentenmethode auf Fishers k -Parameter (deren Erwartungswerte die Kumulanten sind); einmal nach dem Maximum-likelihood-Prinzip, dessen Gleichungen mit Hilfe sukzessiver Approximationen gelöst werden. Verf. dehnt die Methodik auf den Fall von drei Gruppen aus, in welchem, wenn die p Meßvariablen in den drei Gruppen Normalverteilungen mit gleicher Streuungsmatrix folgen, die Abgrenzung bestmöglicher Bereiche auf kanonische Variablen, d. h. voneinander unabhängige lineare Funktionen der p Variablen führt. Die Lösung des zweiten Problems baut Verf. auf dem Begriff des „Abstandes“ (Distanz-Funktion) zweier Gruppen auf, den er aus der oben erwähnten Abgrenzung in bestmögliche Bereiche als maximale Wahrscheinlichkeit richtiger Entscheidung zwischen den beiden Gruppen definiert und der in dem Spezialfalle, in welchem in allen Gruppen die p Variablen Normalverteilungen mit gleicher Streuungsmatrix folgen, eine monoton wachsende Funktion des von P. C. Mahalanobis [On the generalized distance in statistics. *Proc. nat. Inst. Sci. (India)* **12**, 49 (1936)] eingeführten „verallgemeinerten Abstandes“ D ist. Letzterer ist stets vorzuziehen dem von K. Pearson 1921 definierten „Rassenähnlichkeitsmaß“, bei welchem die p benutzten

Variablen als miteinander unkorreliert vorausgesetzt werden müssen. Die Berechnung von $D^2 = \sum \alpha^{ij} d_i d_j$, wobei $d_i = \mu_{i1} - \mu_{i2}$ die Differenz der Mittelwerte der i -ten Variable in den beiden Gruppen und (α^{ij}) die Reziproke der gemeinsamen Dispersionsmatrix (α_{ij}) der beiden p -dimensionalen Normalverteilungen ist, vereinfacht Verf. durch lineare Transformation der ursprünglichen Variablen x_1, \dots, x_p

$$y_1 = x_1, y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2, \dots, y_p = a_{p1} x_1 + \dots + a_{pp} x_p$$

in p untereinander unkorrelierte Variablen y_1, \dots, y_p . Zur Gewinnung derjenigen besten linearen Kombinationen der p Variablen, welche die Summe aller aus den k Gruppen herstellbaren D^2 -Werte zu einem Maximum machen (also die beste Konstellation der Gruppen garantieren), werden die in der Faktoranalyse gebräuchlichen „kanonischen Vektoren“ herangezogen. In der von Welch, Hartley, Morant, Slater, Tocher, Penrose u. a. geführten Diskussion werden Beziehungen zur mehrdimensionalen Regressionsanalyse erörtert und andere von Biologen verwendete Maße (Zarapkins Kriterium, „Gestalt“- und „Größe“-Maße). Sämtliche Methoden werden an numerischen Beispielen der Praxis erläutert. *M. P. Geppert* (Bad Nauheim).

Boag, John W.: Maximum likelihood estimates of the proportion of patients cured by cancer therapy. J. R. statist. Soc., Ser. B, London 11, 15—44 (1949).

Untersuchung der Absterbeordnung von einheitlich behandelten, krebskrank verstorbenen Krebspatienten zeigt, daß bei denselben die Überlebenszeit t der „Lognormalverteilung“ folgt, d. h. daß für einen solchen Patienten die Wahrscheinlichkeit, genau im Zeitpunkt t nach Beginn der Behandlung zu sterben, $dx \cdot \exp(-x^2/2)/\sqrt{2\pi}$ mit $x = (\log t - \mu)/\sigma$ beträgt. Prüfung mittels des χ^2 -Kriteriums erweist diese Näherung als geeigneter als die zum Vergleich herangezogenen Verteilungen $\alpha^2 t \exp(-\alpha t)$, $2\alpha t \exp(-\alpha t^2)$, $\alpha^3 t^2 \exp(-\alpha t)/2$. Von diesem Resultat ausgehend, entwickelt Verf. eine Methode, die dazu dient, aus klinischem Material, welches in vier Gruppen eingeteilt ist, je nachdem ob im Zeitpunkt t nach Behandlungsbeginn der Patient noch lebt oder nicht und krebsfrei oder -behaftet ist, die unbekannte Wahrscheinlichkeit c für dauernde Heilung auf Grund des Maximum-likelihood-Prinzips zu bestimmen. Hierbei werden im allgemeinsten Falle auch die unbekannten Parameter μ und σ der Normalverteilung nach demselben Prinzip bestimmt, im einfachsten Fall hingegen μ und σ aus früheren Versuchsserien als bekannt angenommen. Die drei, zwei oder eine entsprechenden Likelihood-Gleichungen $\partial L/\partial \sigma = \partial L/\partial \mu = \partial L/\partial c = 0$ sind recht komplizierter Natur und werden durch sukzessive Approximationen gelöst und durch Bestimmung der zugehörigen mittleren Fehler und Betrachtung der durch diese Auswertung erzielten Gesamtinformation (nach Fisher) in Abhängigkeit von t für jeden der drei betrachteten Fälle ergänzt. Für die hierbei auftretenden Hilfsfunktionen von x und c werden Tabellen und Nomogramme gegeben. In der anknüpfenden Diskussion (mit Irwin, C. A. B. Smith, Greenwood, Spicer, Daw u. a.) werden die vom Verf. zur Vereinfachung benutzten Voraussetzungen über die beteiligten Sterbens- und Wiedererkrankungswahrscheinlichkeiten erörtert, und die Vorteile der neuen Methode gegenüber der von den Praktikern häufig angewandten, vom statistischen Gesichtspunkt bedenklichen und nichtssagenden 5-Jahre-Überlebensrate sowie gegenüber der zu sehr brauchbaren Ergebnissen führenden, Versicherungsmathematischen Methode der Überlebendentafeln oder Absterbeordnungen. *Geppert*.

Haldane, J. B. S.: Parental and fraternal correlations for fitness. Ann. Eugenics, London 14, 288—292 (1949).

Verf. betrachtet die „Eignung“ eines Genotyps, d. h. die mittlere Anzahl der Nachkommen eines solchen, als quantitatives Erbmerkmal. Drückt sich die Wirkung der Allelomorphen A, a auf die Eignung so aus, daß die Eignungen der Genotypen AA, Aa, aa sich verhalten wie $(1-K):1:(1-k)$ mit positiven k, K , so ergibt sich bei Gleichgewicht und Panmixie, daß die Korrelation zwischen Eignung der Eltern und derjenigen der Kinder Null ist, während die Korrelation zwischen den Eignungen beliebiger Geschwister $(1-2\sigma)/(2-2\sigma)$ ist, wo $\sigma = kK/(K+k)$ die Streuung der Eignung innerhalb der Tochtergeneration ist. Hingegen ist, wenn Aa von geringerer Eignung ist als aa [im Verhältnis $(1-k):1$], A ständig neu entsteht durch Mutation, aber AA selten bleibt, die Eltern-Kinder-Korrelation $\sqrt{1-k}/2$, die Korrelation zwischen Geschwistern $(1-k)/2$; und schließlich, wenn aa im Vergleich zu AA und Aa die Eignung $(1-k)$ besitzt und a durch Mutation entsteht, die Eltern-Kind-Korrelation sehr klein, die zwischen Geschwistern ungefähr $\frac{1}{4}$. Verf. schlägt vor, diese Resultate zur quantitativen Erforschung der Vererbung menschlicher Eignung zu benutzen. *M. P. Geppert* (Bad Nauheim).

Penrose, L. S.: The meaning of „Fitness“ in human populations. Ann. Eugenics, London 14, 301—304 (1949).

Die Arbeit schließt sich eng an die Gedankengänge von J. B. S. Haldane (vgl. vorsteh. Referat) an, die wesentlich auf der Annahme beruhen, daß die einer Paarung entspringende Kinderzahl das Produkt der „Eignungen“ der Eltern ist. Im Gegensatz hierzu untersucht Verf. die Verhältnisse unter der Annahme, daß die Kinderzahl eines Elternpaares die Summe der Eignungen der Eltern sei. Verf. untersucht zunächst den Fall des Genotypen-Gleichgewichts bei Panmixie, sodann den Gleichgewichtsfall letaler Homozygoten bei Zulassung bzw. bei Ausschaltung derselben im zufälligen Paarungssystem. Es wird versucht, dieses additive Eignungsmaß mit konkreten Beispielen in Einklang zu bringen.

M. P. Geppert.

Haldane, J. B. S.: A test for homogeneity of records of familial abnormalities. Ann. Eugenics, London, 14, 339—341 (1949).

Zur Bestimmung der unbekannten Häufigkeit $p = 1 - q$ eines Merkmals unter den Kindern einer bestimmten Eltern-Kombination bezüglich desselben diene, wie es in der menschlichen Genetik häufig der Fall ist, eine Gruppe von insgesamt N Geschwisterreihen, innerhalb welcher sich jeweils mindestens ein Merkmalsträger befindet. Ist n_s die Anzahl der Geschwisterreihen mit je s Kindern, a_{rs} die Anzahl der Geschwisterreihen mit je s Kindern und r Merkmalsträgern, R die Gesamtzahl der Merkmalsträger, so wird der sich, wenn sämtliche derartige Geschwisterreihen erfaßt sind, also nur die Familienauslese zu berücksichtigen ist, aus der Schätzung $R/p = \sum_s s n_s / (1 - q^s)$ von p ergebende Erwartungswert $E(a_{1s}) = spq^{s-1} n_s / (1 - q^s)$

für die Anzahl a_{1s} der Geschwisterreihen mit genau einem Merkmalsträger benutzt zum Vergleich mit der empirisch gefundenen Anzahl a_{1s} . Ist hingegen das Material nicht vollständig erfaßt, sondern die Wahrscheinlichkeit, eine Geschwisterreihe zu erfassen, proportional der Anzahl r der Merkmalsträger in derselben, so ergibt sich zur Korrektur dieser „Probandenauslese“ bekanntlich eine Schätzung von p aus dem Quotienten $p = (R - N)/(T - N)$, wo T die Gesamtzahl der Glieder der erfaßten Geschwisterreihen ist, und hieraus für a_{1s} der Erwartungswert $E(a_{1s}) = n_s q^{s-1}$. In beiden Fällen baut Verf. auf dem Vergleich der empirischen mit der erwartungsmäßigen Anzahl a_{1s} einen „Homogenitäts-Test“ auf. Verf. dehnt den Gedanken aus auf Beobachtungsmaterial, das nur Geschwisterreihen mit mindestens zwei Merkmalsträgern umfaßt.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Pinel, Émile: Essai d'interprétation cinématique des courbes en cloche de Gauss. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 236—238 (1948).

Die bei äquidistanten Blutentnahmen in Abhängigkeit von der Zeit festgestellten prozentualen Häufigkeiten polynukleärer Leukozyten werden stochastisch gedeutet auf Grund zufälliger Zuordnung der N Zeitpunkte der Blutentnahme zu den entsprechenden t Zeiteinheiten der polygenetischen Periode T (Inkubationszeit). Anwendung der Stirlingschen Formel auf die Verteilung

$$P = (1/N)^t \cdot [(N-1)/N]^{T-t} \cdot T!/(T-t)! t!$$

führt in der üblichen Weise auf den Typ der Normalverteilung.

M. P. Geppert.

Tocher, K. D.: A note on the analysis of grouped probit data. Biometrika, Cambridge 36, 9—17 (1949).

Die biologische Prüfung von Präparaten, Impfsenen usw. fußt bekanntlich größtenteils auf „Wirkungskurven“, die für einige bestimmte Dosen x_s des betreffenden Agens die experimentell beobachteten zugehörigen Häufigkeiten r_s/n_s derjenigen unter den n_s mit der Dosis x_s behandelten Versuchsobjekten angeben, welche auf dieselbe positiv reagieren. Diese Häufigkeiten sind zufällige Abweichungen von den entsprechenden wahren Reaktionswahrscheinlichkeiten und werden nach bekannten Methoden dazu benutzt, um auf Grund des Maximum-likelihood-Prinzips oder anderer Forderungen Mittelwert und Streuung der zugrundeliegenden Normalverteilung, deren Integrale die wahren Reaktionswahrscheinlichkeiten sein sollen,

zu bestimmen. Verf. untersucht den Fall, in welchem die einer Dosis x_s zugeordneten n_s Versuchsobjekte nicht alle genau die gleiche Dosis x_s erhalten, sondern Dosen eines x_s einschließenden Intervalls, also den Fall gruppierter Daten, und gibt für die Schätzung der genannten Parameter auf Grund des Maximum-likelihood-Prinzips Gleichungen für eine iterative Lösung. Im Falle gleicher Klassenbreiten läßt sich das mühsame iterative Verfahren approximativ abkürzen, indem man die Daten zur Schätzung der Parameter Mittelwert und Streuung wie ungruppierte benutzt und lediglich die Streuung mit der üblichen Sheppard-Korrektur verbessert. Die Methoden werden an einem numerischen Beispiel der experimentellen Psychologie illustriert.

M. P. Geppert (Bad Nauheim).

Patinkin, Don: Relative prices, Say's law, and the demand for money. *Econometrica*, Chicago **16**, 135—154 (1948).

Nach der klassischen Geldtheorie geht das Geld nicht in die Nutzenfunktion ein, da die Menschen aus dem Halten von Geldbeständen keinen Nutzen ziehen. Geld ist in dieser Theorie (Walras, Pareto, Divisia) nur eine Rechnungseinheit. Da Geld jedoch eine Rolle im Wirtschaftsleben spielt, muß der Wunsch, Geld zu halten, vom Geldpreis, d. h. dem absoluten Preisniveau, abhängen. — Weiter werden bei der Analyse der klassischen nichtmonetären und Geldtheorie vollkommener Wettbewerb und das Streben der Individuen nach maximalem Nutzen angenommen. Abgeleitet wird dabei wieder das klassische Resultat, daß die Preise in einer Wirtschaft mit Austausch und Produktion eindeutig bestimmt sind, wenn der Preis des „Geld“-Gutes = 1 gesetzt wird. Über das Geld folgt auch, daß sowohl zu Beginn wie zu Ende einer Wirtschaftsperiode vom Individuum keine Geldbestände gehalten werden. Ferner wird die Budgetgleichung des a -ten, der insgesamt mit m angenommenen Zahl der Individuen:

$$\sum_{j=1}^{n-1} p_j (Z_{ja} - \bar{Z}_{ja}) = 0.$$

Dabei sind Z_{ja} bzw. \bar{Z}_{ja} seine Güterbestände zu Beginn bzw. zu Ende der Wirtschaftsperiode und p_j die Preise der $n-1$ Güter — das n -te, das Geld, fehlt. — Weiter werden 2 Wirtschaftssysteme A und B betrachtet, die sich nur dadurch unterscheiden, daß in A das Geld in die Nutzenfunktion eingeht, in B nicht. Entweder ist dann A richtig oder B . „Möglichkeit“ (consistency) von A

oder B bedeutet, daß $X_i(p_1, \dots, p_{n-1}) \equiv \sum_{a=1}^m X_{ia}(p_1, \dots, p_{n-1}) \equiv \sum_{a=1}^m (Z_{ia} - \bar{Z}_{ia}) = 0$ ($i=1, \dots, n$)

eine Lösung in den p_j besitzt. — Weiter wird angenommen: 1. Der Grenznutzen eines jeden Gutes ist > 0 und endlich, 2. als hinreichende Bedingung für ein echtes Maximum gilt identisch in den Z_{ia}

$$(-1)^k \begin{vmatrix} 0 & u_1^a & \dots & u_k^a \\ u_x^a & u_{x1}^a & \dots & u_{xk}^a \end{vmatrix}_{x=1, \dots, k} > 0 \quad (k=2, 3, \dots, n),$$

wo u_i^a bzw. u_{ij}^a ($i, j=1, \dots, n$) die ersten bzw. zweiten partiellen Ableitungen der Nutzenfunktion $u^a(Z_{1a}, \dots, Z_{na})$ des a -ten Individuums sind, 3. die u_i^a und u_{ij}^a sind stetige Funktionen von Z_{ia} . Unter den damit gewonnenen Ergebnissen sind zu nennen: Für die Richtigkeit von B ist $Z_{na} \equiv 0$ in p_i notwendig. Notwendige Bedingungen für die Möglichkeit von B sind, daß $Z_{na} \equiv 0$, ferner, daß die Z_{ja} ($j=1, \dots, n-1$) homogen vom Grade 0 in den p_j ($j=1, \dots, n-1$) sind. Für die Auflösbarkeit nach absoluten Preisen ist die Richtigkeit von A notwendige Bedingung. Für die Richtigkeit von A ist notwendig, daß nicht alle Z_{ja} ($j=1, \dots, n-1$) homogen vom Grade 0 in den p_j sind. — Der benutzte mathematische Apparat besteht aus der Theorie der Funktionen mehrerer Variablen, speziell der Maxima und Minima. Eine spezielle Erweiterung des mathematischen Modells wurde nicht vorgenommen.

Rudolf Günther (Nordhausen).

Geometrie.

Algebraische Geometrie:

Stubban, John Olav: Sur la courbe paracanonique. *Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci.*, V. S. **35**, 191—196 (1949).

La courbe de genre p , d'ordre $2p-2$, dans l'espace à $p-2$ dimensions s'appelle courbe paracanonique. Pour $p > 7$ c'est l'intersection partielle de $p-3$ hyperquadriques (théorème 1). L'A. précise ensuite la génération de la courbe pour

$p \leq 7$ comme intersection complémentaire de certaines hypersurfaces ayant déjà une courbe déterminée commune ($p = 6$ et 7). Pour $p = 5$ il s'agit de surfaces dans S_3 (théorèmes 6 à 9).

L. Lesieur (Poitiers).

Jongmans, F. et L. Nollet: Classification géométrique des faisceaux de courbes algébriques planes de genre deux. Bull. Sci. Math., II. S. 72_I, 80—96 (1948).

Substituant à la classification de De Franchis basée sur la méthode arithmétique de Noether, une classification géométrique plus complète faisant intervenir l'ordre minimum, le genre et le degré effectif de l'adjoint pur, les AA. résolvent pour chaque type les problèmes d'existence et de construction. La connaissance approfondie des faisceaux de courbes de genre deux leur est utile dans un mémoire sur les systèmes linéaires de courbes algébriques planes de genre quatre (ce Zbl. 33, 393).

L. Lesieur (Poitiers).

Jongmans, F. et L. Nollet: Classification des systèmes linéaires de courbes algébriques planes de genre trois. Acad. Belgique, Cl. Sci., Mém. Coll. 8^o, II. S. 24, Nr. 1594, 48 p. (1949).

Poursuivant leurs travaux récents sur la classification des systèmes linéaires de courbes algébriques planes (faisceaux de genre deux, systèmes de genre quatre) les auteurs entreprennent ici la classification des systèmes linéaires de courbes algébriques planes de genre trois. Les résultats ne peuvent trouver place dans ce court compte-rendu; ils sont résumés à la fin du mémoire (page 41). Citons seulement le plan d'étude: une classification arithmétique (Chap. I) précède la classification géométrique (Chap. II). Celle-ci est directe pour les systèmes dont l'adjoint est de genre $p_1 < 3$; elle profite de la classification arithmétique lorsque $p_1 \geq 3$. Dans leur préface, les auteurs font une rapide analyse critique des travaux antérieurs sur cette question (De Franchis, Castelnuovo, Max Noether, Defrise, Conforto, Du Val, Todd).

L. Lesieur (Poitiers).

Nollet, Louis: Recherches sur les systèmes linéaires de courbes algébriques planes. Mém. Soc. Sci. Liège, IV. S. 7, 469—554 (1947).

L'A. donne la classification des systèmes linéaires de courbes algébriques planes. L'étude des adjoints purs successifs d'un système linéaire donné joue un rôle important dans le présent travail. Nous ne pouvons pas entrer évidemment dans les détails de ce mémoire de grande étendue et riche de contenu. Pour caractériser, nous montrons le théorème final. — Soit $|C|$ un système linéaire de courbes irréductibles de genre effectif p . Désignons par $|C_1|, |C_2|, \dots, |C_k|$ la suite des adjoints purs successifs de $|C|$, et par p_1, p_2, \dots, p_k les genres effectifs de ces systèmes linéaires. Alors $p_k = 0$, ou $p_k = 1$ et il existe un premier système irréductible C_i , qui peut être le système $|C|$ lui-même, donnant lieu à la relation $p_i > p_{i+1}$. La suite finie p_i, p_{i+1}, \dots, p_k est constamment décroissante. — Si l'un des systèmes C_{i+h} est dégénéré, ou bien 1. ce système $|C_{i+h}|$ coïncide avec $|C_k|$ et est composé au moyen d'un faisceau de courbes unicursales, bisécantes aux courbes $|C_{k-1}|$, qui sont alors irréductibles, $p_k = 0$, ou bien 2. $|C_{i+h}|$ est composé au moyen d'un faisceau $|E|$ de courbes elliptiques; dans ce cas, $|C_k|$ coïncide avec $|E|$, $p_k = 1$, et tous ces systèmes $|C_{i+h+1}|, |C_{i+h+2}|, \dots, |C_{k-1}|$ sont composés au moyen du même faisceau $|E|$; en outre, $p_{i+h}, p_{i+h+1}, \dots, p_k$ forment une progression arithmétique de raison un. — Si l'ensemble $|C_i|, |C_{i+1}|, \dots, |C_k|$ renferme un système $|C_j|$ non simple de dimension supérieur à 2, tous les systèmes $|C_j|, |C_{j+1}|, \dots, |C_k|$ sont formés de courbes hyperelliptiques et composés au moyen d'une même involution plane du second ordre. — L'ensemble $|C_1|, |C_2|, \dots, |C_i|$ renferme tout au plus un système dégénéré, composé au moyen d'un faisceau de courbes de genre 2; ce système coïncide nécessairement avec $|C_1|$; $|C|$ est alors un faisceau de courbes hyperelliptiques et $|C_2|$ est irréductible, composé au moyen d'une involution plane du second ordre et formé de courbes hyperelliptiques, de dimension $2p - 3$.

F. Kárteszi (Budapest).

Gambier, Bertrand: Courbes planes de classe p dont tous les systèmes de tangentes concourantes ont les mêmes directions de p -sectrices. Bull. Sci. math., II. S. 71_I, 232—246 (1947).

In einer mit Drehsinn versehenen Ebene werde mit (δ, D) der (bis auf Vielfache von π bestimmte) Winkel bezeichnet, um den man die Richtung δ drehen muß, um sie parallel D zu machen. Sind dann D_1, D_2, \dots, D_p p verschiedene Richtungen, so bestimmt die Gleichung

$$(\delta D_1) + (\delta D_2) + \dots + (\delta D_p) = 0$$

p (gegeneinander um Vielfache von π/p verdrehte) Richtungen δ , die Verf. die p -teilenden Richtungen der D_i nennt. Für $p = 2$ ergeben sich die Winkelhalbierenden von D_1, D_2 . Einer Anregung von Hadamard gemäß studiert Verf. die ebenen Kurven p -ter Klasse, die für jedes System von p sich in einem Punkte schneidenden Tangenten D_1, D_2, \dots, D_p dieselben p -teilenden Richtungen haben. Für $p = 2$ ergeben sich als Kurve 2. Klasse zwei Fernpunkte, für $p = 3$ erhält man nach Laguerre lediglich die Steinersche dreispitzige Hypozykloide H_3 (oder das System dreier Fernpunkte). In ausführlicher Untersuchung zeigt Verf., daß allgemein notwendig und hinreichend für die verlangten Kurven p -ter Klasse die Eigenschaft ist, daß die Ferngerade Doppeltangente ist und die Berührungspunkte die absoluten Kreispunkte sind; ihre isotropen Tangenten fallen mit der Ferngeraden zusammen. Es wird bewiesen, daß für die Ordnung n der Kurve $2p - 2 \leq n \leq p^2 - p - 2$ ist und zu jedem Kreispunkt im Sinne Halphens ein Zykel $(p-1)$ -ten Grades und erster Klasse gehört. Neben jeder solchen Kurve dieser Art ist auch jede Parallelkurve und jede Evolute (erster oder höherer Ordnung) eine Lösung des Problems (allerdings i. a. mit veränderter Klassenzahl), ebenso alle algebraischen Hypozykloiden, nicht aber die Epizykloiden. Ausführlicher wird der Fall der Klassenzahl $p = 4$ studiert.

K. Strubecker (Karlsruhe).

Gambier, Bertrand: Courbes algébriques de classe p dont une p -sectrice de chaque système de tangentes concourantes passe par un point fixe. Ann. sci. École norm. sup., III. S. 66, 1—17 (1949).

Vgl. die vorsteh. besprochene Arbeit. — In der vorliegenden Arbeit werden die ebenen Kurven p -ter Klasse behandelt, die die Eigenschaft haben, daß jedes System in einem Punkte zusammenlaufender Richtungen unter ihren p -teilenden Geraden eine besitzt, die durch einen festen eigentlichen Punkt O hindurchgeht. Es wird gezeigt, daß notwendig und hinreichend für solche Kurven ist, daß die isotropen Geraden des Punktes O die Kurve in den absoluten Kreispunkten I, J berühren und daß dies die einzigen isotropen Tangenten sind (woraus folgt, daß die Ferngerade keine Tangente ist). Neben jeder solchen Kurve C haben auch ihre Parallelkurven die geforderte Eigenschaft (bei gleicher oder veränderter Klasse); die Evolute dagegen nur dann, wenn C rational ist. Die Ordnung der Kurven kann zwischen dem Maximalwert $p(p-1)$ und einem Minimalwert $2(p-1)$ schwanken, der im irrationalen Falle erreicht wird, wenn die Doppeltangenten nicht Wendetangenten und die Kreispunkte I, J $(p-1)$ -fache Punkte sind. In gewissen Fällen, z. B. für die Epizykloiden, deren algebraischesämtlich Lösungen sind, kann die Ordnung sich noch weiter senken. Ausführlich werden auch die elliptischen Kurven 3. Klasse des Problems studiert. Als Nebenergebnis findet Verf. für sie in dualer Formulierung folgende Verschärfung eines Satzes von Laguerre: Ist $(A_1, A_2, A_3), (B_1, B_2, B_3), (C_1, C_2, C_3)$ irgendeine Verteilung der Wendetangenten einer elliptischen Kubik auf drei Geraden A, B, C , dann berühren die 6 Wendetangenten B_i, C_j und die beiden Geraden B, C denselben Kegelschnitt, wobei B und C die Tangenten in seinen Schnittpunkten mit A sind. [Bem. des. Ref.: Den vom Verf. vervollständigten Satz von Laguerre über die elliptischen Kurven 3. Ordnung hat jedoch früher schon W. Wirtinger in vollem Umfang bewiesen in Mh. Math. Phys. 4, 395—397

(1893); vgl. auch die an diese Arbeit anschließende Note von G. Kohn, ebenda 398, sowie die Arbeit von W. Wirtinger über die Rektifikation algebraischer Kurven bei projektiver Maßbestimmung, ebenda 5, 92—96 (1894)]. *Strubecker*.

Derwidué, L.: Recherches sur les transformations birationnelles. Mém. Soc. Sci. Liège, IV. S. 7, 197—366 (1947).

Castelnuovo [Memorie scelte, Bologna 1937, S. 267 und Pompilj, Rend. sem. mat. Univ. Roma IV. S. 2, 47—87 (1938); dies. Zbl. 18, 328] haben die Frage nach den Cremona-Transformationen mit Mannigfaltigkeiten von Fixelementen gestellt; das wesentlichste Hilfsmittel, das sie anwandten, waren die Systeme der Adjungierten. Verf. geht von vornherein von Klassen von äquivalenten aus und kommt so zu einer vollständigen Typeneinteilung. Er zeigt zunächst: 1. Wenn eine ebene Cremona-Transformation ein Büschel von Fixkurven hat, so hat sie auch ein solches, das cremona-äquivalent einem Strahlenbüschel oder einem Büschel elliptischer Kurven 3. Ordnung oder einem Halphenschen Büschel ist (ein Halphensches Büschel besteht aus Kurven $3n$ -ten Grades; seine 9 Basispunkte sind je n -fach für die Kurven). 2. Wenn eine räumliche Cremona-Transformation eine lineare Kongruenz von Fixkurven hat, hat sie auch eine von rationalen, elliptischen oder hyperelliptischen Fixkurven. 3. Wenn eine räumliche Cremona-Transformation ein Büschel von Fixflächen hat, hat sie auch ein solches von rationalen Flächen, von elliptischen Regelflächen, von hyperelliptischen Flächen oder solchen des Geschlechts 1. 4. Kurven, die punktweise festbleiben, sind entweder rational oder cremona-äquivalent einer elliptischen Kurve 3. Ordnung oder einer Kurve eines Halphenschen Büschels. Ebenso sind Flächen von Fixpunkten einer räumlichen Cremona-Transformation entweder rational oder äquivalent einer Regelfläche, oder alle geometrischen Geschlechter sind höchstens 1. — In allen diesen Fällen untersucht nun Verf. einzeln die Transformationen und ihre Gruppen. Gibt es ein Büschel oder eine Kongruenz von rationalen Fixkurven, so ist die Gruppe isomorph dem Restklassenring nach einem Polynom dreier homogener Veränderlicher. Sind die Fixkurven elliptisch, so ist die Gruppe zyklisch; nur für harmonische oder äquianharmonische elliptische Funktionenkörper erweitern sich die Gruppen. Von den Kurven, die punktweise festbleiben können, untersucht Verf. insbesondere die Geraden, die Kurven 6. Ordnung mit 10 getrennten Doppelpunkten, die zerfallenden Kurven 6. Ordnung mit 11 getrennten Doppelpunkten, die zerfallenden Kurven 9. Ordnung mit 10 getrennten 3-fachen Punkten und konstruiert in allen Fällen dazugehörige Transformationen, womit seit längerer Zeit offene Existenzfragen beantwortet sind. — Entsprechende Aussagen macht Verf. für Transformationen mit Büscheln von Fixflächen. Sind diese vom Geschlecht 1, so ergeben sich eigentümliche Schwierigkeiten, die Transformation zu konstruieren, auf die Verf. zum Schluß hinweist. *O.-H. Keller*.

Derwidué, L.: Sur les transformations birationnelles cycliques. Bull. Soc. Sci. Liège 16, 31—37 (1947).

Ergänzungen zu der vorstehend besprochenen Arbeit des Verf. In der Ebene gibt es drei Typen von zyklischen Cremona-Transformationen: 1. solche mit einem Büschel von Fixgeraden oder fixen elliptischen Kurven 3. Ordnung. 2. Solche mit nur endlich vielen Fixpunkten. 3. Solche, die die Geraden eines Büschels ineinander transformieren (wobei dann eine oder zwei Geraden fest bleiben müssen). Der Hauptteil des Beweises besteht darin, zu zeigen, daß es eine Transformation, die die Kurven eines Büschels elliptischer Kurven 3. Ordnung unter sich vertauscht, nicht geben kann. *Ott-Heinrich Keller (Dresden)*.

Derwidué, L.: Sur la génération des transformations birationnelles de l'espace. Bull. Soc. Sci. Liège 16, 134—144 (1947).

Die Gruppe der räumlichen Cremona-Transformationen kann durch folgende Transformationen erzeugt werden: 1. Quadratische Transformationen der beiden

Arten: In denen der ersten Art entsprechen die Ebenen den Quadriken durch einen festen Kegelschnitt und einen festen Punkt. In denen der zweiten Art entsprechen die Ebenen den Quadriken durch eine feste Gerade und drei feste Punkte. 2. Monoideale Transformationen, die die Ebenen in Monoide überführen. 3. Solche Transformationen, die die Ebenen in Flächen übergehen lassen, die nur mehrfache Linien mit getrennten veränderlichen Tangentialebenen haben und durch einfache Basispunkte in veränderlicher Richtung hindurchgehen. Die Basiscurven haben keine Singularitäten und haben mit einander normale Schnitte (im Sinne von Chisini). Da die Mannigfaltigkeit der unter 3. aufgeführten Transformationen nicht von geringerer Dimension ist als die der räumlichen Cremona-Transformationen überhaupt, ist freilich mit dieser Zerlegung weiter kein Einblick in die Struktur der Gruppe gewonnen.

Ott-Heinrich Keller (Dresden).

Derwidué, L.: Résolution des singularités d'une surface algébrique au moyen de transformations crémoniennes. Bull. Soc. Sci. Liège 16, 276—289 (1947).

Verf. gibt eine Kette von Cremona-Transformationen, mittels deren eine beliebige algebraische Fläche des Raumes in eine andere transformiert wird, die nur mehrfache Kurven mit im allgemeinen getrennten Tangentialebenen hat, die sich mit getrennten Tangenten in einzelnen Punkten schneiden und sonst nur gewöhnliche Spitzen haben. Verf. benutzt dabei den Satz, daß die erste Polare in einem effektiven oder fiktiven r -fachen Punkt ($r - 1$)-fach sei. Dem Ref. scheint der Satz in der beim Beweis benötigten Allgemeinheit nicht richtig zu sein. *O. H. Keller*.

Godeaux, Lucien: Sur une représentation des transformations birationnelles de l'espace. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. 35, 92—96 (1949).

La transformation birationnelle $PT'P'$ entre deux espaces Σ et Σ' peut être représentée par une variété V_3 dont chaque point est en correspondance birationnelle avec le couple P, P' de points homologues par T ; aux plans α de Σ correspondent ainsi sur V_3 des surfaces F , aux plans α' de Σ' des surfaces F' . L'A. se propose d'étudier la représentation de deux courbes Γ et Γ' fondamentales associées de 2ème espèce: P étant fixé sur Γ les couples formés par P et ses homologues, qui décrivent Γ' , sont représentés par une courbe γ , dont le lieu, quand P décrit Γ , est une surface M ; on définit de même M par un lieu de courbes γ' . Les degrés de $V_3, F, F', \gamma, \gamma'$ et M sont aisément déterminés par les caractères projectifs de la transformation. En terminant l'A. amorce l'étude des propriétés des courbes fondamentales de 2ème espèce au moyen de cette surface M . *L. Lesieur* (Poitiers).

Segre, B.: On arithmetical properties of quartic surfaces. Proc. London math. Soc., II. S. 49, 353—395 (1947).

Verf. sucht nach Punkten mit rationalen Koordinaten auf einer Fläche 4. Ordnung, möglichst nach Mannigfaltigkeiten von solchen, aus denen also durch beliebige rationale Wahl des Wertes eines Parameters ein rationaler Punkt herausgegriffen wird. Verf. hatte sich in früheren Arbeiten [z. B. J. London math. Soc. 18, 24—31, 226—233 (1943)] dieselbe Frage für Flächen 3. Ordnung gestellt. Verf. beschränkt sich auf solche Flächen, die gerade Linien ganz enthalten; dafür ist das Verschwinden einer gewissen Invariante vom 320. Grad in den Koeffizienten notwendig und hinreichend. Er definiert nun einen R -Prozeß: Es sei C die gerade Linie, P ein rationaler Punkt auf ihr. Die Tangentialebene an die Fläche in P schneidet diese außer in C noch in einer Kurve 3. Ordnung, auf der auch P liegt. Die Tangente daran in P schneidet sie in einem weiteren rationalen Punkt Q . Bewegt sich P längs C , so auch Q längs einer gewissen Kurve, der R -transformierten von C . — Liegen zwei windschiefe gerade Linien C und D ganz auf der Fläche, so definiert Verf. eine T -Transformation: Durch jeden Punkt P der Fläche gibt es genau eine Gerade, die C und D schneidet. Sie schneidet die Fläche in einem weiteren Punkt Q , der rational ist, wenn das Paar C, D und der Punkt P es ist. Wird diese Transformation durch eine Projektivität des Raumes induziert, so nennt Verf. C

und D assoziiert. Verf. untersucht weiter einige Fälle, in denen der R -Prozeß versagt. Es sind dies vor allem Regelflächen, und er gibt für sie vollständige, von zwei Parametern abhängige Lösungen. Verf. untersucht eine große Zahl weiterer Sonderfälle, z. B. Flächen mit mehr als 2 geraden Linien, die Eulersche Fläche $x^4 + y^4 = z^4 + w^4$, ferner ausführlich die Flächen der Form $\varphi(x, y) = \psi(z, w)$. Es seien P_i die Schnittpunkte der Fläche mit $z = w = 0$, Q_i die Schnittpunkte der Fläche mit $x = y = 0$. Dann liegen die Linien $P_i Q_j$ ganz auf der Fläche (Linien I. Art). Jeder Projektivität der Punktreihe P_i mit der Punktreihe Q_j entsprechen 4 gerade Linien, die ganz auf der Fläche liegen (Linien II. Art). Ihre Zahl erhöht sich, wenn die P_i und Q_j harmonisch oder äquianharmonisch liegen. Verf. untersucht alle diese Fälle gesondert. Es sei gestattet, auf die Übersichtlichkeit der Arbeit, das klare und ausführliche Inhaltsverzeichnis und die große Zahl sehr instruktiver Beispiele hinzuweisen.

Ott-Heinrich Keller (Dresden).

Sample, J. G.: On complete quadrics (I). J. London math. Soc. 23, 258—267 (1949).

In Analogie zu den vollständigen Kegelschnitten [v. d. Waerden, Math. Ann. Berlin 115, 645—655 (1938); dies. Zbl. 19, 180; F. Severi, Ann. Mat. pura appl., IV^o S. 19, 153—242 (1940); dies. Zbl. 23, 372; F. Severi, Grundlagen der abzählenden Geometrie, Wolfenbüttel 1949] erklärt Verf. eine „vollständige Quadrik“ als ein Gebilde des dreidimensionalen Raumes, das gleichzeitig in Punktkoordinaten durch eine quadratische homogene Gleichung $Q_L: \sum a_{rs} x_r x_s = 0$, in Ebenenkoordinaten durch $Q_E: \sum b_{rs} u_r u_s = 0$ und in Geradenkoordinaten durch $Q_C: \sum c_{rr'ss'} p_{rr'} p_{ss'} = 0$ gegeben ist. Bei einer nicht ausgearteten Quadrik ist $|a_{rs}| \neq 0$, (b_{rs}) die zugehörige adjungierte und ($c_{rr'ss'}$) die zweite adjungierte Matrix, d. h. Q_E und Q_C sind durch Q_L bis auf einen Proportionalitätsfaktor bestimmt. Bei ausgearteten Q_L müssen die Koeffizienten a, b, c gewissen bilinearen Bedingungsgleichungen genügen. Deren Diskussion liefert 7 verschiedene Fälle von Ausartungen (gegenüber 3 Ausartungen bei den vollständigen Kegelschnitten), welche durch die Symbole φ, ψ, χ und deren Zusammensetzungen bezeichnet werden. (Ausartung φ : Q_L ist eine Doppellebene π^2 , Q_E ein Kegelschnitt k in π , Q_C die Sekanten von k ; Ausartung ψ : Q_C ist der doppelt gezählte spezielle lineare Komplex aller Geraden, die eine feste Gerade p treffen, Q_E zwei Punkte auf p , Q_L zwei Ebenen durch p ; Ausartung χ : Q_E ein doppeltgezählter Punkt P , Q_L ein Kegel K mit Spitze in P , Q_C alle Tangenten von K . Durch Überlagerungen entstehen die höheren Ausartungen $\varphi\psi, \varphi\chi, \chi\psi$ und $\varphi\psi\chi$.) — Im Anschluß an die Methode von v. d. Waerden beweist Verf., daß die Bildmännigfaltigkeit der vollständigen Quadriken eine singularitätenfreie M_9 ist, auf welcher die 8-dimensionalen Ausartungsmännigfaltigkeiten φ, ψ, χ durch je eine Form ausgeschnitten werden, deren weitere Durchschnitte die höheren Ausartungen ergeben. — Die interessanten geometrischen Eigenschaften dieser M_9 , ihre Charakteristiken sowie Verallgemeinerungen auf höherdimensionale Räume sollen in einer folgenden Arbeit behandelt werden.

Gröbner (Innsbruck).

Scott, D. B.: A functional basis for the Betti ring of an algebraic surface. J. London math. Soc. 23, 271—275 (1949).

Die Basen der Homologiegruppen der Dimensionen $0, \dots, n$ einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit liefern eine Basis für den Homologiering \mathfrak{H} der Mannigfaltigkeit, wenn man diesen Ring als einen linearen Modul über irgendeinem passenden Koeffizientenring betrachtet. Verf. untersucht die Möglichkeit, statt dieser Basis eine sog. funktionale Basis zu wählen, d. h. eine Menge von Elementen aus \mathfrak{H} derart, daß jedes Element von \mathfrak{H} als eine Summe von Produkten (d. h. topologischen Durchschnitten) einer endlichen Anzahl Elemente dieser Basis darzustellen ist, und fragt insbesondere nach einer Minimalbasis. Das Problem wird für den Bettischen Ring \mathfrak{B} über dem Körper der rationalen Zahlen einer algebraischen Fläche F betrachtet (wobei natürlich die Fläche als eine 4-dimensionale topologische Mannig-

faltigkeit aufzufassen ist). — Es mögen $\gamma_1, \dots, \gamma_{2q}$ eine Basis für die 1-Zyklen bilden und $\Gamma_1, \dots, \Gamma_{2q}$ eine Basis für die 3-Zyklen, wofür also gilt $(\gamma_i, \Gamma_j) = \delta_{ij}$ (Kroneckersymbol). Es seien C, c bzw. algebraische und transzendente Zyklen der (topologischen) Dimension 2. Die Matrizen a und α sind definiert durch

$$\Gamma_i \cdot C \approx a_{ij} \gamma_j, \quad \Gamma_i \cdot c \approx \alpha_{ij} \gamma_j, \quad (i, j = 1, \dots, 2q),$$

(Summationskonvention). Mit C_1, \dots, C_q werden die Elemente einer kanonischen Basis bezeichnet, womit eine Basis gemeint ist, für die die ersten t Glieder linear unabhängige Matrizen $a^{(1)}, \dots, a^{(t)}$ haben und die übrigen zugehörigen Matrizen Null sind. Die Zyklen C_{t+1}, \dots, C_q definieren einen Modul \mathfrak{D} . Ein zweiter Modul \mathfrak{Q} besteht aus ganzzahligen algebraischen Zyklen, die Summen von Vielfachen der 2-Zyklen Q_1, \dots, Q_t sind, definiert durch $Q_m \approx y_{mr} C_r$ ($m = 1, \dots, t; r = 1, \dots, q$), mit $(C_r \cdot C_s) = x_{rs}$ und $x y = 1_q$. — Beispiele von Flächen, für die $\mathfrak{D} \cap \mathfrak{Q}$ nicht leer ist und doch nicht $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{Q}$ gilt, scheinen nicht bekannt zu sein. Die Moduln \mathfrak{D} und \mathfrak{Q} haben intrinsische Bedeutung, d. h. sie sind von den für ihre Definitionen gewählten Basen unabhängig. Ähnlich kann man die transzendenten Moduln \mathfrak{o} und \mathfrak{q} erklären. — Verf. kommt zum folgenden Ergebnis. Unter der Voraussetzung, daß \mathfrak{D} wenigstens eine Kurve enthält, deren a -Matrix nicht singular ist, betrachte man die Kurven D_1, \dots, D_{q-t} , von denen aus jeder Nebenklasse von \mathfrak{D} nach \mathfrak{A} eine einzige genommen ist (\mathfrak{A} ist der Modul der algebraischen Kurven). Zusammen mit Q_1, \dots, Q_t bilden diese eine Basis für \mathfrak{B} . Weiter werden $R_2 - q - u$ (R_2 ist eine Bettische Zahl; u bedeutet für \mathfrak{q} dasselbe wie t für \mathfrak{D}) transzendente 2-Zyklen d_1, \dots, d_{R_2-q-u} genommen, aus jeder Nebenklasse von \mathfrak{q} im Modul der transzendenten Zyklen eine einzige. Die Zyklen $F, \Gamma_1, \dots, \Gamma_{2q}, D_1, \dots, D_{q-t}, d_1, \dots, d_{R_2-q-u}$ bilden eine funktionale Basis für \mathfrak{B} und zwar eine Minimalbasis. In übertragenem Sinne kann man nun das Problem leicht lösen für den Bettischen Ring \mathfrak{B}^* , wobei nur ganze Zahlen als Koeffizienten auftreten. *J. C. H. Gerretsen (Groningen).*

Samuel, Pierre: *Multiplicités des composantes excédentaires d'intersection.* C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 158—159 (1949).

In seiner grundlegenden Monographie „Foundations of algebraic geometry“ [Amer. math. Soc. Coll. Publ. **29** (1946)] hat A. Weil gezeigt: Jede irreduzible Komponente des Durchschnitts zweier irreduzibler algebraischer Mannigfaltigkeiten U, V von den Dimensionen u, v im n -dimensionalen affinen Raum hat eine Dimension $m \geq u + v - n$. Die Weilsche Vielfachheitstheorie beschränkt sich dabei auf die eigentlichen Komponenten, bei denen der Exzeß $e = m - (u + v - n)$ verschwindet. Verf. skizziert eine Ausdehnung auf Komponenten von beliebigem Exzeß (einfachstes Beispiel: Definition der Multiplizität der eventuellen Schnittpunkte zweier eindimensionaler Kurven im dreidimensionalen Raum). Die Vielfachheiten, die für Komponenten von positivem Exzeß eingeführt werden, sind invariant gegenüber birationalen, biregulären Transformationen. Dagegen zeigen zahlreiche einfache Gegenbeispiele, daß die Assoziativitätsformel (Weil, a. a. O., Kap. VI, Satz 5) sich nicht auf den Fall des positiven Exzesses überträgt und daß auch das Prinzip der Erhaltung der Anzahl seine Gültigkeit verliert. Die explizite Angabe der Beispiele sowie die Ausführung der Beweise bleibt einer späteren Veröffentlichung vorbehalten. *Krull (Bonn).*

Differentialgeometrie in euklidischen Räumen:

Gürsan, Feyyaz: *Les éléments d'ordre supérieur d'une courbe gauche.* Rev. Fac. Sci. Univ. Istanbul A **12**, 230—236 (1947).

Verf. stellt sich die Aufgabe, die „Elemente n -ter Ordnung“ einer Kurve $\mathfrak{r}(s)$, nämlich die Ableitungen $\mathfrak{r}^{(n)}(s)$, durch geometrische Elemente der Kurven zu bestimmen. Für sphärische Kurven wird das mittels des sphärischen Krümmungs-

radius und des zugehörigen Zentriwinkels durchgeführt. Kurze Angaben über zylindrische und konische Schraubenlinien. *Gericke* (Freiburg i. Br.).

Kasner, Edward and John de Cicco: Physical curves in space of n dimensions. *Proc. nat. Acad. Sci. USA* **35**, 201—204 (1949).

Verff. dehnen ihre früheren Untersuchungen [*Proc. nat. Acad. Sci. USA* **33**, 246—251 (1947)] auf den n -dimensionalen Raum aus. Ein System von ∞^{2n-1} physikalischen Kurven S_k liegt in einem Kraftfeld F derart, das F der Schmiegungebene von S_k angehört; dabei soll die Zentrifugalkraft P eines in S_k bewegten Massenpunktes proportional der Normalkomponente N von F sein, $P = kN$ mit $k = \text{const.}$ Bei gegebenen F und k werden die Koordinaten von S_k aus einem System von Differentialgleichungen 2. Ordnung bestimmt. Verff. gehen aus von den Frenetschen Formeln von S_k und zeigen, daß für die $n - 1$ Krümmungen von S_k einfache Relationen bestehen. Ist die Anfangsgeschwindigkeit des Massenpunktes Null (Ruhebahn), so verhält sich die erste Krümmung der Bahnkurve S_k zur ersten Krümmung der Feldlinie wie $(1 + k) : (3 + k)$. Zum Schluß werden die Schmiegungeebenen der durch den gleichen Raumpunkt gehenden S_k betrachtet. *Haack* (Berlin).

Daghetto, Adolfo: Über einige Eigenschaften der Kurven auf einer Regelfläche. *Math. Notae, Bol. Inst. Mat., Rosario* **8**, 134—140 (1948) [Spanisch].

As a solution of a problem proposed in the same journal, some properties of the curves which meet under constant angle the generators of a ruled surface are considered. *Ancochea* (Madrid).

Grove, V. G.: On congruences and conjugate nets. *Amer. J. Math.* **69**, 58—69 (1947).

Verf. untersucht konjugierte Kurvennetze unter dem Gesichtspunkt der metrischen Geometrie. In willkürlichen Parametern sei g_{ik} der Maßtensor und d_{ik} der zweite Grundtensor einer Fläche S , die das konjugierte Netz N trägt. Die Tangentenvektoren U und V der Netzkurven werden mittels d_{ik} normiert. Entsprechend der geodätischen Krümmung bezüglich g_{ik} erklärt Verf. eine „asymptotische Krümmung k “ bezüglich d_{ik} für die Netzkurven. Die Kurven verschwindender asymptotischer Krümmung sind die Extremalen des Integrals $\int \sqrt{e d_{ik} du^i du^k}$; dabei ist $e = \pm 1$, je nachdem S elliptisch oder hyperbolisch gekrümmt ist. Ist k für beide Kurvenscharen von N konstant, so ist N isotherm-konjugiert. Durch elementare Drehungsformeln gelangt Verf. zu Büscheln von Netzen. Die Krümmungen k transformieren sich dabei linear homogen (kontragredient), Extremale gehen in Extremale über. — Im zweiten Teil wird eine Konstruktion für die allgemeinste Strahlenkongruenz angegeben, deren Torsen S in einem konjugierten Netz schneiden. Zum Schluß wird die Analogie zu den Normalenkongruenzen hervorgehoben und eine entsprechende Konstruktion für diese gegeben. *Haack* (Berlin).

Ascoli, Guido: Sopra una proprietà delle normali ad una superficie ed una sua parziale estensione. I. II. *Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur.*, VIII. S. **5**, 280—285 (1948), **6**, 3—6 (1949).

Die Arbeit enthält eine Verallgemeinerung eines Satzes von F. Tricomi [*Atti Accad. Sci. Torino* **81/82**, 10 (1945/47)]. Geht von jedem Punkte einer Fläche eine Gerade einer Kongruenz aus, so kann man auf diese eine beliebige Verbiegung der Fläche so übertragen, daß die Winkel des Kongruenzstrahles mit den Flächenkurven durch den zugehörigen Flächenpunkt erhalten bleiben. Wird nun auf jede Kongruenzgerade vom Flächenpunkt aus nach beiden Seiten die gleiche Strecke $h/2$ abgetragen, so ist das Volumen V des von diesen Strecken ausgefüllten Raunteiles dann und nur dann für genügend kleines h für jedes Flächenstück bei einer beliebigen Verbiegung der Fläche invariant, wenn eine der folgenden gleichwertigen Bedingungen erfüllt ist: 1. Das sphärische Bild der Kongruenzgeraden wird bei jeder Verbiegung der vorgegebenen Fläche flächentreu abgebildet. 2. Projiziert man den Einheits-

vektor jedes Kongruenzstrahles senkrecht auf die zugehörige Tangentenebene der Fläche, so entsteht der Drehriß (G. Darboux, *Théorie des surfaces* IV, Livre 8, Paris 1896) einer infinitesimalen Verbiegung der Fläche in sich. Eine von der Normalenkongruenz verschiedene Kongruenz kann also nur dann die angegebene Eigenschaft besitzen, wenn die Fläche konstante Krümmung hat oder sich auf eine Drehfläche abwickeln läßt; im ersten Fall gibt es ∞^3 , im zweiten ∞^1 derartige Kongruenzen. Für V gilt die einfache Formel $V = h \int \cos \theta \, dA + \frac{1}{12} h^3 A^*$; hier ist θ der Winkel des Kongruenzstrahls mit der Flächennormalen, dA das Oberflächenelement der Fläche, A^* die Oberfläche des sphärischen Bildes der Kongruenz. *Bol.*

Correnti, Salvatore: Sulle forme tipiche del ds^2 delle superficie a curvatura costante. *Mat., Catania* **3**, 40—48 (1948).

Ausgehend von der Forderung, daß die Flächen mittleren konstanten Krümmungsmaßes $k = c/2$ auf Rotationsflächen abwickelbar sein müssen, also das Quadrat des Bogenelementes die Form $ds^2 = 2\varphi(x-y) \, dx \, dy$ haben muß, wird durch Integration der aus dem Theorema egregium sich ergebenden Differentialgleichung $S = 2n^2/c \, \text{Ein}(n(x-y)/2 + m)$ (n, m beliebige Konstante) bestimmt. Daraus werden durch Umformung die bekannten Darstellungen $ds^2 = -4 \, du \, dv / \text{Ein}^2((u-v)/R)$ bzw. $du^2 + \text{Coj}^2(u/R) \, dv^2$ bzw. $du^2 + \cos^2(u/R)^2 \, dv^2$ ($c = \mp 2/R^2$) gewonnen. Für $k = 0$ wird ds^2 in die Liouvillesche Form gebracht. *Volk (Würzburg).*

Hartman, Philip: Systems of total differential equations and Liouville's theorem on conformal mappings. *Amer. J. Math.* **69**, 327—332 (1947).

Verf. beweist zunächst den einem Satz von P. du Bois Reymond analogen Hilfssatz: Sind $x(u, v)$, $y(u, v)$ in einem gegebenen Bereich \mathfrak{B} Funktionen mit stetigen ersten partiellen Ableitungen (Funktionen der Klasse C') und ist $x_u y_v - x_v y_u \neq 0$ in \mathfrak{B} , so ist dafür, daß $\int_C \alpha(u, v) \, dx = 0$, $\int_C \alpha(u, v) \, dy = 0$ für jede beliebige rektifizierbare Jordan-Kurve in \mathfrak{B} , wo $\alpha(u, v)$ eine stetige Funktion in \mathfrak{B} , notwendig und hinreichend, daß $\alpha(u, v) = \text{const.}$ Ausgehend von den Rodriguesschen Differentialgleichungen für die Krümmungslinien einer Fläche wird nun der für Flächen der Klasse C''' bekannte (vgl. z. B. L. Bieberbach, *Differentialgeometrie*, Leipzig und Berlin 1932, S. 68—69; dies. Zbl. **5**, 261) Satz, daß eine Fläche ein Stück einer Ebene oder einer Kugel darstellt, wenn die Hauptkrümmungen $k_1(u, v)$ und $k_2(u, v)$ in \mathfrak{B} identisch sind, für Flächen der Klasse C''' bewiesen. Daraus läßt sich die Gültigkeit des Liouvilleschen Satzes, daß jede dreidimensionale konforme Abbildung der Klasse C''' eine Möbiustransformation ist, auch für die Klasse C'' folgern. *Volk (Würzburg).*

Pinl, M.: Binäre orthogonale Matrizen und integrallose Darstellungen isotroper Kurven. *Math. Ann., Berlin* **121**, 1—20 (1949).

In dieser dem Gedächtnis von L. Berwald gewidmeten Arbeit liefert Verf. eine systematische Untersuchung der Methoden und Möglichkeiten, isotrope Kurven $\mathfrak{r}(t)$ euklidischer Räume integrallos darzustellen. Solche integrallose Darstellungen sind besonders in der dualistischen Theorie der isotropen Kurven von Interesse geworden [vgl. M. Pinl, *Mh. Math. Phys.* **39**, 157—172 (1932), **44**, 1—12 (1936), **49**, 261—278 (1940), *Math. Z.* **42**, 337—354 (1937); dies. Zbl. **4**, 129, **14**, 179; **23**, 266, **15**, 415]. Im zweiten Teil der Arbeit werden die hauptsächlichen Anwendungen dieser Methode auf die integrallose Darstellung der isotropen Kurven des R_3 , R_4 und R_5 und auf die von ihnen erzeugten Flächen (isotrope Torsen und Minimalflächen) gegeben. — Die algebraische Grundlage der Differentialgeometrie solcher isotroper Kurven $\mathfrak{r}(t)$ besteht im wesentlichen in Rangaussagen über die zugeordneten Gramschen Matrizen \mathfrak{G} der abgeleiteten Ortsvektoren $\mathfrak{r}^{(k)}(t)$, denen in der dualistischen Theorie ähnliche Aussagen über die Gramschen Matrizen \mathfrak{S} der zugeordneten Stellungsvektoren \mathfrak{e}_i und ihrer Ableitungen $\mathfrak{e}_i^{(k)}(t)$ entgegengetreten.

In manchen Fällen gelingt es dabei, die aus den Matrizen \mathcal{G} entspringenden Differentialgleichungen durch rein algebraische Bedingungsgleichungen, die aus den Matrizen \mathcal{H} hervorgehen, zu ersetzen und diese mit Hilfe orthogonaler Matrizen zu erfüllen, was Verf. insbesondere unter Verwendung binärer orthogonaler Matrizen zeigen kann. Die Bestimmung des Stellungsvektors $e(t)$ einfacher isotroper Hyperebenen­scharen des R_n läßt sich zuweilen auf die Bestimmung isotroper Kurven auf Hypersphären zurückführen. Damit ist dann zwar nur eine integrallose Darstellung des Tangentenbildes gewonnen, die aber für differentialgeometrische Zwecke meistens eine integrallose Darstellung der Kurve selbst vollkommen ersetzen kann. — Natürlich sind auch die klassischen integrallosen Darstellungen der isotropen Kurven des R_3 (auf zweifache Art) in der allgemeinen Darstellungstheorie des Verf. mit enthalten.

K. Strubecker (Karlsruhe).

Pinl, M.: Über Flächen mit isotropem mittlerem Krümmungsvektor. *Mh. Math.*, Wien **52**, 301—310 (1948).

Die Fläche $\mathfrak{r}(u_1, u_2)$ des komplexen euklidischen R_n sei auf isotope Parameter bezogen, also $g_{11} = g_{22} = 0$, $g_{12} = g_{21} \neq 0$. Ist dann ihr Krümmungsaffinor $\mathfrak{h}_{\alpha\beta} = \mathfrak{r}_{\alpha\beta} - \left\{ \begin{smallmatrix} \mu \\ \alpha\beta \end{smallmatrix} \right\} \mathfrak{r}_\mu$, so wird ihr mittlerer Krümmungsvektor

$$\mathfrak{h} = g^{\alpha\beta} \mathfrak{h}_{\alpha\beta} = 2g^{12} \mathfrak{r}_{12}$$

dann und nur dann isotrop, wenn \mathfrak{r}_{12} isotrop ist. Die Theorie der Flächen mit isotropem mittlerem Krümmungsvektor \mathfrak{h} ($\mathfrak{h}^2 \equiv 0$) gründet sich also auf die Identitäten

$$(1) \quad \mathfrak{r}_1^2 \equiv \mathfrak{r}_2^2 \equiv \mathfrak{r}_{12}^2 \equiv 0,$$

(ähnlich wie sich die Theorie der Minimalflächen in isotropen Parametern auf die Identitäten

$$(2) \quad \mathfrak{r}_1^2 \equiv \mathfrak{r}_2^2 \equiv 0, \mathfrak{r}_{12} \equiv 0$$

gründet). Wegen $\mathfrak{h}_{\alpha\beta} \mathfrak{r}_\lambda = 0$, $\mathfrak{h} \mathfrak{r}_\lambda = g^{\alpha\beta} \mathfrak{h}_{\alpha\beta} \mathfrak{r}_\lambda = 0$ liegt der mittlere Krümmungsvektor \mathfrak{h} im $(n-2)$ -dimensionalen Normalenraum der Fläche. Im euklidischen R_3 folgt aus (1) $\mathfrak{r}_{12} \equiv 0$, also sind (1) und (2) äquivalent und Flächen mit isotropem mittlerem Krümmungsvektor sind nicht möglich. — Solche Flächen gibt es erst im euklidischen R_4 . Da \mathfrak{r}_{12} mit \mathfrak{h} kollinear ist, ist der Trivektor $e = [\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{r}_{12}] \neq 0$ wegen $e^2 = 0$ isotrop. Der Schmiegraum der Fläche \mathfrak{r} , bestimmt durch die Vektoren $||\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_{11}, \mathfrak{r}_{12}, \mathfrak{r}_{22}||$, ist drei- oder vierdimensional, je nachdem die Matrix $||e, e_1, e_2||$ des Trivektors e und seiner Ableitungen den Rang $r = 1$ oder $r > 1$ (2 oder 3) hat. Im Fall $r = 1$ liegt die Fläche in einem isotropen R_3 ; die Theorie dieser Flächen hat Ref. ausführlich entwickelt [*Math. Z.* **47**, 743—777 (1942), **48**, 369—427 (1942); dies. Zbl. **26**, 263, **27**, 253]. — Im Falle $r = 2$ ist allen Punkten derselben isotropen Parameterkurve $u_2 = \text{const.}$ der gleiche isotope R_3 zugeordnet, ohne daß die Fläche eine isotope Torse wäre; der Schmiegraum ist vierdimensional. — Rang $r = 3$ kennzeichnet die allgemeinen Flächen des euklidischen R_4 mit isotropem mittlerem Krümmungsvektor. Es gelingt Verf., diese Flächen als integrallose Lösungen der Mongeschen Gleichung $\mathfrak{h}^2 \equiv 0$ darzustellen. Man kann sie als Gratflächen der zweiparametrischen isotropen R_3 -Schar $e \mathfrak{r} + f(u_1, u_2) = 0$ ($c^2 \equiv 0$) gewinnen, wobei $f_{1212} \neq 0$ sein muß. Wenn $f_{1212} = 0$, aber $f_{11} \cdot f_{22} \neq 0$ ist, ergeben sich Minimalflächen in R_4 ; insbesondere für $f_{12} = 0$ Minimalflächen in einem isotropen R_3 des R_4 . Nach einem allgemeinen Satze des Ref. ist dann die Gaußsche Krümmung der Fläche $K \equiv 0$.

K. Strubecker (Karlsruhe).

Haack, Wolfgang: Strahlenkomplexe mit integrierbaren Pfaffschen Differentialformen. *Math. Z.* **52**, 322—341 (1949).

Ein Stück \mathcal{P} einer dreidimensionalen Mannigfaltigkeit des vierdimensionalen Studyschen Strahlenraumes heißt bekanntlich ein Strahlenkomplex, wenn die Komponenten der zwei Vektoren α, α des dualen Vektors \mathfrak{A} als solche Funktionen dreier Parameter u^1, u^2, u^3 gegeben sind,

die im Gebiet Ψ mindestens dreimal stetig differenzierbar sind und die ferner überall in Ψ die Identitäten $\alpha\alpha = 1$; $\alpha\alpha = 0$ erfüllen, so daß nirgends in Ψ sämtliche dreireihige Determinanten verschwinden, die aus den sechs Vektoren $\partial\alpha/\partial u^i$, $\partial\bar{\alpha}/\partial u^i$ gebildet werden können. Der Parameter-raum der Differentialgeometrie der Strahlenkomplexe ist dreidimensional, und alle zugeordneten Differentialformen der Theorie sind ternäre Differentialformen. Die Skalarprodukte der ersten Ableitungen $\mathfrak{A}_i = \partial\mathfrak{A}/\partial u^i$ des dualen Vektors \mathfrak{A} bilden die Koeffizienten der dualen quadratischen Differentialform $d\Phi^2 = \mathfrak{A}_i \mathfrak{A}_k du^i du^k = G_{ik} du^i du^k$. Trennung von Real- und Dualteil führt auf zwei reelle Tensoren zweiter Stufe $g_{ik} = \alpha_i \alpha_k$, $g_{ik} = \alpha_i \alpha_k + \bar{\alpha}_i \bar{\alpha}_k$. Das sphärische Bild α des Komplexes ist höchstens zweidimensional. Daher verschwindet die Determinante der ersten Ableitungen $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und daher auch $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)^2 = |g_{ik}|$. Deutet man die 3 Komponenten des kontravarianten Vektors \dot{u}^i als homogene Koordinaten eines Punktes der projektiven Ebene, so bestimmen die beiden quadratischen Differentialformen $g_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k = 0$, $g_{ik} \dot{u}^i \dot{u}^k = 0$ zwei Kegelschnitte, deren erster in ein konjugiert-komplexes Geradenpaar zerfällt, dessen der zweite Schnittpunkt mit den Koordinaten l^i auf dem zweiten Kegelschnitt liegt. Einen zweiten Schnittpunkt mit den Koordinaten m^i liefert das Geradenpaar $(g_{ik} - d g_{ik}) \dot{u}^i \dot{u}^k = 0$. Dabei ist $d = g_{ik} g^{ik}$ und $k = 1/2 d$ der Hauptdrall des Komplexes. Schließlich schneidet die Polare des Punktes m^i in bezug auf den nichtzerfallenden Kegelschnitt diejenige Gerade des Geradenpaares $(g_{ik} - d g_{ik}) \dot{u}^i \dot{u}^k = 0$, welche nicht die Punkte m^i , l^i verbindet, in einem dritten Punkt mit den Koordinaten n^i . Im Falle linearer Unabhängigkeit lassen sich aus den drei kontravarianten Vektoren m^i , n^i , l^i drei kovariante Vektoren m_i , n_i , l_i gewinnen und damit die drei ternären Pfaffschen Formen $\alpha = l_i \dot{u}^i$, $\beta = m_i \dot{u}^i$, $\gamma = n_i \dot{u}^i$. Kennt man von einer nichtabwickelbaren Regelfläche des Komplexes den Abstand $\bar{\varphi}$ ihres Kehlpunktes vom Zentralpunkt und den Winkel φ , den ihre Kehlpunktnormale \mathfrak{N} mit der Hauptnormalen \mathfrak{S} des Komplexes einschließt, so ist i. a. ihr Drall $1/\delta$ durch die Formel von Koenigs $\bar{\varphi} \operatorname{tg} \varphi = \delta - k$ bestimmt. Drei Klassen von Regelflächen des Komplexes nehmen eine Ausnahmestellung ein:

$$(1) \delta = k, \varphi = 0, \quad (2) \bar{\varphi} = 0, \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad (3) \delta = k, \varphi = 0.$$

Für die erste dieser Klassen verschwindet α , für die zweite β und für die dritte γ . Die so entstehenden Pfaffschen Gleichungen sind i. a. nicht vollständig integrierbar. Ist $\alpha = 0$ vollständig integrierbar, so bilden ihre Integralregelflächen durch den Komplexstrahl \mathfrak{N} Regelflächen gleichen Dralls und gleichen Kehlpunktes, in ihrer Gesamtheit also ein isotropes Strahlensystem. Daraus folgt: der Strahlenkomplex besteht aus einer Schar isotroper Strahlensysteme, und aus diesem Grunde gehört zu jedem Komplex mit integrierbar erster Pfaffscher Form eine Schar von Minimalflächen, die unter Umständen in eine einzige Minimalfläche zusammenfällt. Für die andern beiden Klassen gilt: sind die linearen Differentialformen, die die Regelflächen der Klasse (2) bzw. (3) bestimmen, integrierbar, so bilden die durch \mathfrak{N} gehenden Regelflächen jeder Klasse ein Strahlensystem. Für die Klasse (2) entstehen zylindrische Strahlensysteme, deren Regelflächen durch denselben Strahl den gleichen Kehlpunkt, aber verschiedenen Drall haben. Für die Klasse (3) entstehen Strahlensysteme, deren Regelflächen umgekehrt im selben Systemstrahl gleichen Drall aber verschiedene Kehlpunkte haben. In beiden Fällen sind die Zylinder der Systeme Ebenen. Sind $p(u)$ und $q(v)$ die Ortsvektoren zweier isotroper Kurven; so bestimmen die Schnitte ihrer Schmiegeebenen nach Ribaucour ein isotropes Strahlensystem. Ist w ein weiterer (reeller!) Parameter, so bestimmen die Vektoren $p(u, w)$, $q(v, w)$ eine Schar isotroper Strahlensysteme, die den Komplex erzeugen. Für die Studyschen Linienkoordinaten aller Strahlenkomplexe, die eine Schar isotroper Strahlensysteme enthalten, ergibt sich so die (normierte) Darstellung

$$\alpha = (p_u \times p_v) \varrho, \quad \bar{\alpha} = [p_u (q v_w) - q_v (p u_w)] \varrho, \quad \varrho = i (p_u q_v), \quad i = \sqrt{-1}.$$

Da sich die isotropen Tangentenvektoren der beiden isotropen Kurven stets in der Form $p_u(u, w) = \Phi(u, w) \hat{p}_u(u)$, $q_v(v, w) = \Psi(v, w) \hat{q}_v(v)$ schreiben lassen, kann diese Darstellung schließlich noch folgendermaßen vereinfacht werden:

$$\alpha = \frac{\hat{p}_u \times \hat{q}_v}{i (\hat{p}_u \hat{q}_v)}, \quad \bar{\alpha} = \frac{1}{i (\hat{p}_u \hat{q}_v)} \{ [F(u, w) - \mathfrak{W} \hat{p}_u] \hat{q}_v - [\bar{F}(v, w) - \mathfrak{W} \hat{q}_v] \hat{p}_u \}.$$

Dabei sind $F(u, w)$, $\bar{F}(v, w)$ zwei willkürliche konjugiert-komplexe Funktionen der reellen Veränderlichen w und der konjugiert-komplexen Veränderlichen u, v . $\mathfrak{W}(u)$, $\mathfrak{W}(v)$ sind willkürliche Vektorfunktionen von w . Die Mittenhüllflächen der isotropen Strahlensysteme $w = \text{const.}$ bilden eine Schar von Minimalflächen

$$m = \frac{1}{2} \left\{ \int \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \hat{p}_u(u) du + \int \frac{\partial^2 \bar{F}}{\partial v^2} \hat{q}_v(v) dv \right\} + \frac{1}{2} (\mathfrak{W} + \bar{\mathfrak{W}}).$$

Da durch $p = \int U(u) \hat{p}_u(u) du$ nach Weierstraß eine isotrope Kurve gegeben ist, deren integrallose Darstellung durch die Substitution $U(u) = F'''(u)$ entsteht, kann nunmehr dieser Substitution die bemerkenswerte Deutung gegeben werden: die Funktion F bestimmt die isotropen Strahlensysteme, die zur Minimalfläche mit der Funktion F''' gehören. Die Integrabili-

tätsbedingungen für die zweite und dritte der Pfaffschen Formen sind identisch. Wenn also eine der beiden Formen vollständig integabel ist, so ist das auch für die andere der Fall. Ein nicht-entarteter Strahlenkomplex, dessen drei Pfaffsche Formen vollständig integabel sind, läßt sich mittels der isotropen Vektoren \hat{p}_u, \hat{q}_v durch die Gleichungen

$$\alpha = \frac{\hat{p}_u \times \hat{q}_v}{i(\hat{p}_u, \hat{q}_v)}, \quad \bar{\alpha} = [-(U_1 w + U_2) \hat{q}_v + (V_1 w + V_2) \hat{p}_u] \cdot \frac{1}{i(\hat{p}_u, \hat{q}_v)}$$

darstellen. Dabei sind U_1, U_2 und V_1, V_2 willkürliche Funktionen der konjugiert-komplexen Veränderlichen u bzw. v . Insbesondere ist ein reeller Strahlenkomplex mit drei integablen Pfaffschen Formen durch zwei willkürliche Funktionen U_1, U_2 einer komplexen Veränderlichen bestimmt. Ferner gilt: in einem Komplex mit drei integablen Pfaffschen Formen erzeugen die sphärischen Bilder der zylindrischen Strahlensysteme, die durch das Verschwinden der zweiten und dritten Differentialform bestimmt werden, ein isometrisches Kurvennetz der Einheitskugel. Von besonderem Interesse werden schließlich noch die isotropen Kurven und isotropen Minimalflächen, die zu den Strahlenkomplexen mit drei integablen Linearformen gehören. So erzeugen die Schmiegungsebenen des Büschels isotroper Kurven $p(u, w) = p_3(u)w + p_4(u)$, in dem $p_3(u), p_4(u)$ zwei beliebige isotrope Kurven sind, im Schnitt mit den Schmiegungsebenen der entsprechenden Kurven des konjugiert-komplexen Büschels $q(v, w) = q_3(v)w + q_4(v)$ einen Strahlenkomplex mit drei integablen Pfaffschen Formen. Die Mittenflächen der in dem Komplex enthaltenen isotropen Strahlensysteme bilden ein Minimalflächenbüschel. Zu einem gegebenen Minimalflächenbüschel gibt es höchstens ∞^6 Strahlenkomplexe, die die Minimalfläche des Büschels als Mittenhüllflächen ihrer isotropen Strahlensysteme besitzen. Fallen die Mittenhüllflächen der Schar isotroper Strahlensysteme des Komplexes \mathfrak{M} in ein und dieselbe Minimalfläche zusammen, so bestimmt die zweite Pfaffsche Form auf der Einheitskugel des sphärischen Bildes eine Schar von Parallelkreisen und die dritte Pfaffsche Form die zugehörige Schar von Meridianen. Ein Beispiel für einen derartigen Komplex erhält man aus einer Kettenlinie, die durch Rotation um die z -Achse ein Katenoid erzeugt. Ist E eine beliebige Evolvente der Kettenlinie, so entsteht aus dieser die Drehfläche E_r . Längs eines Meridians von E_r bilden die Tangenten der Parallelkreise einen Zylinder. Die zu den Erzeugenden senkrechten Tangenten dieses Zylinders sind die Strahlen eines Komplexes mit drei integablen Pfaffschen Formen, dessen isotrope Strahlensysteme sämtlich das Katenoid als gemeinsame Mittenhüllfläche besitzen. *M. Pinl.*

Differentialgeometrie besonderer Liescher Gruppen:

Hsiong, Chuan-Chih: Affine invariants of a pair of hypersurfaces. *Amer. J. Math.* **71**, 879—882 (1949).

Haben in einem affinen Raum R_n zwei Hyperflächen V_{n-1} und W_{n-1} den gemeinsamen Tangentialraum $x_n = 0$ mit den Berührungspunkten V_0 und W_0 , wobei die Gerade $V_0 W_0$ eine reguläre Tangente ist, so lassen sich die Gleichungen von V_{n-1} bzw. W_{n-1} in der Umgebung der Berührungspunkte V_0 und W_0 durch Potenzreihen darstellen:

$$V_{n-1}: x_n = \sum v_{ik} x_i x_k + \dots \text{ und } W_{n-1}: x_n = \sum w_{ik} x_i x_k + \dots$$

Aus den Größen v_{ik} und w_{ik} werden zwei affine Differentialinvarianten aufgestellt und für diese eine metrische Deutung gegeben, wobei Resultate von Terracini [*Atti. Accad. Sci. Torino* **71**, 310—328 (1936); dies. Zbl. **14**, 177] und Santaló (dies. Zbl. **30**, 71) gebraucht werden. *Weitzenböck* (Overveen).

Wu, George: Study of a surface by means of certain associate ruled surfaces in affine space. *Amer. J. Math.* **69**, 801—814 (1947).

Analog zu E. P. Lane [Projective differential geometry of curves and surfaces, S. 119, Chicago 1932; dies. Zbl. **5**, 25] führt Verf. die mit dem Flächenpunkt P verknüpfte kanonische Quadrik ein: Entsprechend den beiden Scharen von Asymptotenlinien gibt es für jede Flächenkurve C_λ einer Schar $dv = \lambda du$ durch P zwei asymptotische Schmieg- F_2 . Ihre Schnittkugelschnitte mit den Schmiegsebenen aller C_λ mit gleicher Tangente t_λ liegen auf zwei Darboux- F_2 , die für $\lambda \rightarrow \infty$ bzw. $\lambda \rightarrow 0$ in die „kanonische Quadrik“ von P zusammenfallen. Diese ist dann und nur dann ein Paraboloid, wenn die Gaußsche Krümmung der quadratischen affinen Grundform verschwindet. Ihr Mittelpunkt ist dann und nur dann fest, wenn sie eine geradlinige Affinsphäre ist. Mit Hilfe der beiden asymptotischen Regel- F_2 R_u und R_v , die einer beliebigen Flächentangente t entsprechen, und der beiden diesen be-

züglich t zugeordneten Moutard- F_2 wird eine Kennzeichnung der Segre-Tangenten in P gewonnen, die Ergebnissen von Čech [Ann. Mat. pura appl., Bologna, III. S. 31, 191—206 (1922)] und B. Su [Tôhoku Math. J. 33, 26—38 (1930), 190—198 (1931); Jap. J. Math. 9, 233—238 (1933); dies. Zbl. 1, 167, 7, 131] verwandt ist. Genauere Untersuchung der Konfiguration der verschiedenen genannten F_2 führt zu einer Reihe von Sätzen. Z. B. liegen die Affinnormalen aller ebenen Schnitte durch t mit den Flächen R_u, R_v je in einer Ebene, analog der sog. Transon-Ebene, in der die Affinnormalen der Schnittkurven derselben Ebenen mit der ursprünglichen Fläche selbst gelegen sind. [J. Math. pur. appl. 6, 191—208 (1841).] Süß.

Pa, Chenkuo: A new definition of the Godeaux sequence of quadrics. Amer. J. Math. 69, 117—120 (1947).

Wie L. Godeaux gezeigt hat [Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci. 16, 812—826 (1930); 14, 31—41 (1928); La théorie des surfaces et l'espace réglé, Actual. sci. industr. 138, Paris 1934; dies. Zbl. 9, 227], kann man jedem regulären Punkte einer analytischen, nicht abwickelbaren Fläche des projektiven Raumes eine Folge von Quadriken $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \dots$ zuordnen, deren erste die Quadrik Φ von Lie ist, und deren zweite, Φ_1, \dots , auch von B. Su [Tôhoku Math. J. 40, 433—448 (1935); dies. Zbl. 11, 324] wiedergefunden wurde, derart, daß je zwei aufeinander folgende Quadriken Φ_{n-1} und Φ_n sich in vier für sie charakteristischen Punkten berühren. L. Godeaux gab durch Abbildung der Schmiegtangenten auf Kleins Φ_4^2 des R_5 eine indirekte Deutung seiner Folge. Verf. zeichnet eine direkte geometrische Deutung der Godeauxschen Folge. Er geht aus von dem oskulierenden linearen Komplex $R_1(u, v)$ einer Asymptotenlinie (= u -Linie) des Flächenpunktes $M(u, v)$. Ist $M(u + du, v + dv)$ ein Punkt der Umgebung 1. Ordnung und $R_1(u + du, v + dv) = R_1 + R_{1u} du + R_{1v} dv + \dots$ der entsprechende lineare Schmiegekomplex, so haben die linearen Komplexe $R(u, v), R_{1u}(u, v), R_{1v}(u, v)$ als Schnitt einen Regulus der Lieschen Quadrik Φ . Geht man zu Umgebungen 2. und höherer Ordnung über, so wird $R_1(u, v + dv) = R_1 + R_{1v} dv + \frac{1}{2} R_{1vv} dv^2 + \frac{1}{6} R_{1vvv} dv^3 + \dots$, und es folgt, daß die linearen Komplexe R_1, R_{1v}, R_{1vv} einen Regulus der Quadrik Φ_1 und zusammen mit R_{1vvv} zwei Geraden g_1, g_2 gemeinsam haben, die zwei Regelflächen G_1 und G_2 erzeugen. Es gibt dann einen linearen Komplex $R_2(u, v)$, der mit G_1 und G_2 längs g_1 und g_2 eine Berührung 3. Ordnung eingeht und mit dessen Hilfe man die Quadriken Φ_2, Φ_3, Φ_4 gewinnt, wenn man wie oben an die Entwicklungen

$R_2 + R_{2u} du + \frac{1}{2} R_{2uu} du^2, R_2 + R_{2u} du + R_{2v} dv, R_2 + R_{2v} dv + \frac{1}{2} R_{2vv} dv^2$ anschließt. Durch Heranziehen der Entwicklung 3. Ordnung

$$R_2 + R_{2v} dv + \frac{1}{2} R_{2vv} dv^2 + \frac{1}{6} R_{2vvv} dv^3$$

erhält man dann die Geraden g_1, g_2 und deren Regelflächen G'_1, G'_2 sowie deren Schmiegekomplex $R_3(u, v)$, mit dessen Hilfe man die Fortsetzung der Godeauxschen Kette erhält. — Verf. zeigt, daß man in analoger Art auch, von den die asymptotische u -Linie querenden Schmiegtangenten und linearen Schmiegekomplexen $S_1(u, v)$ ihrer Regelfläche R_u in $M(u, v)$ ausgehend, zu einer gleich einfachen direkten Deutung der Godeauxschen Quadrikenfolge $\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots$ gelangen kann. — Schließlich weist er darauf hin, daß man den Begriff der Godeauxschen Quadrikenfolge auch auf W -Kongruenzen übertragen kann, wodurch dann jedem Strahl einer solchen W -Kongruenz eine Folge $\dots \Phi_{-n}, \dots, \Phi_{-2}, \Phi_{-1}, \Phi, \Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n, \dots$ von assoziierten Quadriken zugeordnet ist. [Bemerkung des Referenten: Die zuletzt angedeutete Übertragung der assoziierten Quadrikenfolge auf Strahlen von W -Kongruenzen hat jedoch schon L. Godeaux selbst angegeben. Vgl. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci. 13, 812—826 (1927); 14, 31—41 (1928); La théorie des surfaces et l'espace réglé, Actual. sci. industr. 138, Paris 1934; und dies. Zbl. 34, 97].

K. Strubecker (Karlsruhe).

Villa, Mario e Guido Vaona: Le trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo. — I. Intorno del 2° ordine. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. 6, 184—188 (1949).

Villa, Mario e Guido Vaona: Le trasformazioni puntuali in una coppia a Jacobiano nullo. — II. Intorno del 3° ordine. Riferimenti intrinseci. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. 6, 278—282 (1949).

A point transformation T between two linear spaces S_r, S'_r at a pair of corresponding points O, O' with Jacobian zero (of characteristic $k > 0$), induces a singular homography Ω of species $r - k$ between corresponding directions; geometrical elements depending on the neighbourhood of 2nd order of O, O' such as the singular spaces of Ω , the characteristic straight lines (analogous to those considered by Villa [this Zbl. 30, 216 (1949)] in the case of Jacobian $\neq 0$, and the characteristic projectivities inherent in those — are not sufficient to determine completely the essential projective local behaviour of T in the two spaces S_r, S'_r . The a.s. complete the determination of this local behaviour in part II, with restriction to the case $k = r - 1$, by recurring to the neighbourhoods of 3rd order, in an analogous way to that used by Villa l.c. Recurring to the neighbourhoods of 2nd and 3rd order proves sufficient also for $r = 2$, a case already studied by Bompiani [Mem. Accad. Italia 13, 11 (1943)], there however with the intervention of elements of 4th order.

P. Buzano (Torino).

Villa, M. e C. Sangermano: Condizione affinché una trasformazione puntuale fra due S_3 , in una coppia a jacobiano nullo, sia osculabile con una trasformazione cremoniana. Boll. Un. mat. Ital., III. S. 4, 23—30 (1949).

Consider a point transformation T between two spaces S_3, S'_3 at a pair of corresponding points O, O' with Jacobian zero (of characteristic 2). It is stated first that a necessary condition, that T may be osculated in O, O' by a Cremona transformation, is that the stationary straight line through O is a common asymptotic tangent of all surfaces corresponding to the planes through O' . Conversely, if this condition is satisfied, the a.s. determine the equations of ∞^{12} osculating cubic transformations, whereas osculating quadratic transformations generally do not exist.

P. Buzano (Torino).

Longo, Carmelo: Trasformazioni puntuali fra due piani proiettivi in una coppia di punti corrispondenti a direzioni inflessionali di specie superiore indeterminate. Atti Accad. naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fisic. mat. natur., VIII. S. 6, 68—73 (1949).

The au. considers a point transformation T between two projective planes, at such a pair of corresponding points O, O' , that T may be approximated by a projectivity in the neighbourhood of order h . Then the inflexional directions of species $\leq h - 2$ are all indeterminate. But, as the converse of this assertion does not hold either, it does not follow that T may be approximated by a projectivity also in the neighbourhood of order $s > h$, when the inflexional directions of species $\leq s - 2$ are indeterminate. The au. succeeds, however, in approximating T in the neighbourhood of order k ($h \leq k \leq s$) by certain algebraic transformations ($k - 1$), and applies this result to determine the projective invariants of T depending on the neighbourhoods of the single orders (up to $s + 1$). P. Buzano (Torino).

Hsiung, Chuan-Chih: A study on the theory of conjugate nets. Amer. J. Math., 70, 379—390 (1947).

Auf der Fläche S sei ein konjugiertes u, v -Parameter-Netz gegeben. Längs einer Kurve C von S beschreiben die Tangenten der Netzkurven zwei Regelflächen R^u, R^v . Es seien T und \bar{T} zwei Punkte auf den Netztangenten des Punktes P von S . Dann gibt es zwei zueinander duale Geraden: $g_1 = T\bar{T}$ und $g_2 =$ Schnittgerade der Tangentenebenen von R^u in T und R^v in \bar{T} . Zwischen den Geraden g_1 und g_2 steht eine Polarverwandtschaft, wenn C eine ausgezeichnete Richtung hat. —

Verf. bestimmt ferner die Quadrik, die in T mit R^u eine Berührung 2. Ordnung und in T mit R^v eine solche 1. Ordnung hat (und umgekehrt). Schließlich wird eine geometrische Kennzeichnung der kanonischen Geraden von Davis und von Green entwickelt.

Haack (Berlin).

Hsiung, Chuan-Chih: Projective theory of surfaces and conjugate nets in four-dimensional space. Amer. J. Math. **69**, 607—621 (1947).

Verf. entwickelt die projektive Differential-Geometrie einer Fläche $S(x(u, v))$ mit einem konjugierten Netz N . Im I. Abschnitt werden die Ableitungsgleichungen und Integrabilitätsbedingungen aufgestellt. Der oskulierende lineare S_3 der u -Kurve schneidet den oskulierenden S_2 der v -Kurve in der Geraden g_1 , analog gibt es durch Vertauschung von u, v eine Gerade g_2 . Auf g_1 und g_2 gibt es je einen invarianten Punkt y, z . Dann bilden x, x_u, x_v, y, z das Bezugssystem. Auf den Geraden $x x_u$ und $x x_v$ liegen die beiden Laplace-Transformierten x_{+1} und x_{-1} . — Mittels Bompianis quasi-asymptotischer Kurven werden jeder Richtung γ von S zwei S_3 zugeordnet. Dreht sich γ in der Tangentenebene von S um x , so erzeugen die Schnittebenen der S_3 einen kubischen Hyperkegel. — Mittels der Hyperquadriken, die S in x in 3. Ordnung berühren, definiert Verf. kanonische Geraden der Tangentenebene. Diesen werden durch x gehende kanonische Ebenen reziprok zugeordnet, die einen quadratischen Hyperkegel erzeugen. — Die Arbeit schließt mit der Aufstellung von Reihenentwicklungen und einem Studium der Laplace-Transformierten x_{+1} und x_{-1} .

Haack (Berlin).

Rozet, O.: Sur une surface dont la transformée de Lie est la surface minima d'Enneper. Bull. Soc. Sci. Liège **17**, 208—209 (1948).

Durch Verschwinden von 4 projektiven Invarianten wird eine Klasse von Flächen gekennzeichnet, deren beiden Haupttangente-Systeme linearen Komplexen angehören, und deren Lie-Quadriken nur zwei charakteristische Punkte haben. Zu dieser Klasse gehört eine Fläche, deren Lie-Transformierte eine Ennepersche Minimalfläche ist.

Haack (Berlin).

Rozet, O. et F. Thibaut: Sur les surfaces dont les cycliques de Lie n'ont que deux points caractéristiques. Bull. Soc. Sci. Liège **17**, 210—214 (1948).

(M) sei eine auf Krümmungslinien u, v bezogene Fläche des R_3 . Da u, v konjugiert sind, gehört (M) einer Laplace-Folge $\mathfrak{M}(M_{-nu}, \dots, M, \dots, M_{-nv})$ an. Die Zenträmäntel von (M) erzeugen bezüglich u, v eine weitere Laplace-Folge \mathfrak{m} ; dabei ist \mathfrak{M} in \mathfrak{m} einbeschrieben. Durch Abbildung der Hauptkrümmungskugeln von (M) auf die Liesche Hyperquadrik Q_4 ergeben sich zwei Flächen U, V , die der Laplace-Folge $L(U_n, \dots, U, V, \dots, V_n)$ angehören. Nach geeigneter Normierung der Lieschen Kugelkoordinaten U, V folgen aus der Lieschen quadratischen Form (Polarform) bezüglich Q_4) zwei Invarianten α, β . — Im allgemeinen hat die Lie-Zyklide von (M) fünf charakteristische Punkte; ist L nach beiden Seiten unendlich und α oder β Null, so gibt es nur drei, ist dagegen γ und β Null, so gibt es nur zwei charakteristische Punkte auf der Lie-Zyklide. In diesem Fall haben die Folgen $L, \mathfrak{M}, \mathfrak{m}$ die Periode 6. (Anm. des Ref.: Druckfehler auf S. 211, Zeile 14 M_{-nv} statt M_{-uv} ; auf S. 213, Zeile 7 wohl $\beta = 0$ statt $\alpha = 0$.)

Haack (Berlin).

Pa, Chenkuo: Some theorems on rectilinear congruences and transformations of surfaces. Trans. Amer. math. Soc. **65**, 360—371 (1949).

Verf. beweist im wesentlichen die beiden Sätze: 1. Wird ein W -Strahlensystem L von einer Fläche S so geschnitten, daß die Asymptotenlinien der Brennflächen von L denen von S entsprechen, dann ist L ein R -System und S eine R -Fläche, die von den Torsen von S in einem R -Netz geschnitten wird. Zu einer R -Fläche gibt es ∞^4 R -Systeme. — 2. L sei ein zur Transversalfläche S konjugiertes Strahlensystem. S' sei harmonisch konjugiert zu S bezüglich der Brennflächen von L . Entsprechen

sich bei dieser Zuordnung die Asymptotenlinien von S und S' , dann sind S und S' Jonas-Flächen, die von den Torsen von L in Jonas-Netzen geschnitten werden.

Haack (Berlin).

Godeaux, Lucien: Sur une suite de quadriques associée à une congruence W . Amer. J. Math. 69, 490—492 (1947).

Den Haupttangenten U , V einer Fläche F entsprechen zwei Punktsysteme auf der Kleinschen Hyperquadrik Q_4 im S_5 , die einer (bezüglich Q_4 autopolaren) Laplace-Folge $U_n, \dots, U, V, \dots, V_n$ angehören. Demnach schneiden je zwei konjugierte Ebenen $U_n U_{n+1} U_{n+2}$ und $V_n V_{n+1} V_{n+2}$ die Hyperquadrik Q_4 in zwei Kegelschnitten, die das Kleinsche Bild der beiden Erzeugendenscharen einer Fläche 2. Grades des S_3 sind. So ergibt sich eine Schar von Flächen 2. Grades, die invariant mit F verbunden sind; für $n = 1$ erhält man die Lie- F_2 . — In einem W -Strahlensystem entsprechen sich die Asymptotenlinien der Brennflächen. Die Haupttangenten U , V und U , \bar{V} der Brennflächen erzeugen auf Q_4 zwei Laplace-Folgen. Aus diesen konstruiert Verf. zwei konjugierte Folgen J_i und P_i , die in derselben Weise wie oben zu einer Schar von Flächen 2. Grades führen.

Haack (Berlin).

Rozet, O.: Sur certaines congruences non W de droites. Bull. Soc. Sci. Liège 17, 6—9 (1948).

Es sei (x) die eine Brennfläche eines Strahlensystems (j) mit den Asymptotenlinien u , v . Ferner seien U , V die Bilder der Haupttangenten von x auf der Kleinschen Hyperquadrik Q_4 . Das Bild J von (j) läßt sich darstellen durch $J = \alpha U - \beta V$. Verf. berechnet Ableitungsgleichungen für die Fläche $J(u, v)$ von Q_4 und stellt Bedingungen dafür auf, daß die Kurven u bzw. v auf J eben sind, ferner, daß die zweite Brennfläche von (j) eine Regelfläche und im besonderen eine Quadrik ist.

Haack.

Rozet, O.: Sur certaines classes de congruences non W de droites. Bull. Soc. Sci. Liège 17, 186—188 (1947).

Den Haupttangenten einer Fläche F des projektiven dreidimensionalen Raumes S_3 werden auf der Kleinschen Hyperquadrik Q_4 des S_5 die Flächen U , V zugeordnet. Ein Strahlensystem (j) , das F als Brennfläche besitzt, hat das Kleinsche Bild $J = U - \gamma V$. Hat F die Krümmung (-2) nach Fubini-Čech, so läßt sich γ derart bestimmen, daß die Laplace-Transformierten 2. Art J_1, J_{-1} von J mit den Gliedern V_2 bzw. U_2 der durch U , V erzeugten Laplace-Folge 1. Art zusammenfallen.

Haack (Berlin).

Baekes, Fernand: Un cas de congruences doublement stratifiables. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 257—258 (1948).

Als Fortsetzung einer früheren Mitteilung (dies. Zbl. 30, 268) betrachtet Verf. zunächst einen Sonderfall des Systems der Geraden $P_1 P_2$ und wendet sich dann zu den Diagonalsystemen des Grundtetraeders $N_1 N_3$ und $N_2 N_4$. Sind diese beiden Systeme wechselseitig stratifizierbar, dann gibt es stratifizierende Flächen (P) , (Q) mit P auf $N_1 N_3$ und Q auf $N_2 N_4$, so daß u , v Asymptotenlinien auf (P) und (Q) sind und die Invariante k der Laplace-Gleichung der Linienkoordinaten von PQ verschwindet.

Haack (Berlin).

Doyle, Thomas C.: Tensor theory of invariants for the projective differential geometry of a ruled surface. Duke math. J. 14, 381—399 (1947).

Die vorliegende Arbeit soll als Vorstudie zu einer Invariantentheorie der Differentialgeometrie von Geradenkomplexen angesehen werden. Verf. geht von dem Differentialgleichungssystem $y_j'' + p_j^r y_r' + q_j^r y_r = 0$ ($j, r = 1, 2$) aus, wobei die Lösungen $y_j^{(\alpha)}$ ($\alpha = 1, 2, 3, 4$) als homogene Punktkoordinaten gedeutet werden und $\lambda^j y_j^{(\alpha)}$ die Geraden einer Regelfläche darstellen. Wegen $|y_1 y_2 y_1' y_2'| \neq 0$ sind Torsen geschlossen. Die Integralregelfläche bleibt bei den Transformationen $y_i = a_i^k(t) y_k^*$ und $t^* = \xi(t)$ ungeändert. In geeigneten Variablen und geeignetem Parameter erhält man Wilczynskis kanonische Form $y_j^* + q_j^{*r} y_r^* = 0$ mit

$q_r^{*r} = 0$. Die Größen $q_j^{*r} = -U_j^{*r}$ sind die kanonischen Komponenten eines Tensors $U_j^k \equiv u_j - \frac{1}{2} \delta_j^k u_r^r$ mit $u_j^k = \frac{1}{2} p_j^k + \frac{1}{4} p_j^r p_r^k - q_j^k$. Mit (k, w) seien die Gewichte der Tensordichten bezeichnet: $T = a^k (\xi')^w T^*$, $a = |a_j^k| \neq 0$; die Dichte $U = -|U_j^k|$ hat das Gewicht $(0, 4)$. Mit ihrer Hilfe läßt sich eine kovariante Ableitung nach dem Parameter erklären, die durch einen tief gesetzten Punkt bezeichnet sei. Für einen kovarianten Vektor vom Gewicht (k, w) gilt z. B.

$$\lambda_{j.} = U \lambda'_j + \frac{1}{2} U p_j^r \lambda_r + (1 - 2\omega + 2k) \frac{1}{8} U' \lambda_j + \frac{1}{2} k U p_r^r \lambda_j$$

und entsprechend

$$\lambda^i = U \lambda'^i - \frac{1}{2} U \lambda^r p_r^i + (-1 - 2\omega + 2k) \frac{1}{8} U' \lambda^i + \frac{1}{2} k U p_r^r \lambda^i,$$

oder für eine relative Invariante

$$J_{.} = U J' + (k - w) \frac{1}{4} U' J + \frac{1}{2} k U p_r^r J.$$

Durch die Differentiation wird das Gewicht w auf $w + 5$ erhöht. Die kovariante Ableitung von U verschwindet. Die tensorielle Form des Ausgangssystems lautet nunmehr

$$y_{j..} - (U^2 U_j^r + \varrho \delta_j^r) y_r = 0$$

mit $\varrho = \frac{1}{8} U U'' - \frac{9}{64} U'^2 + \frac{1}{2} U^2 u_r^r$. Es werden die Invarianten niedrigster Ordnung aufgesucht und gezeigt, daß das Wilczynskische Theorem gilt, wonach die Größen

$$U, \varrho, J_{10} = \frac{U_r^r \cdot U_s^s}{2 U}, J_9 = \frac{U_s^s U_{t.}^t \cdot U_{r.}^r}{U^3}$$

und ihre sukzessiven kovarianten Ableitungen ein vollständiges Invariantensystem bilden. Entsprechend erhält man ebenfalls die fünf Wilczynskischen Kovarianten. Der Übergang zum adjungierten System vom dualen Standpunkt findet seinen tensoriellen Ausdruck einfach in der Ersetzung von U_j^k durch $-U_j^k$. — Mit den jetzt bereit gestellten Hilfsmitteln werden unter Verwendung von Reihenentwicklungen in speziellen kanonischen Koordinaten verschiedene geometrische Größen untersucht, wie Tangentialebene, Asymptotenlinie, Schmieghyperboloid, Schmieglekomplex, Fleknodalkurven, Fleknodalfläche, Fleknodalkongruenz, Flächen mit einer ebenen, nicht geradlinigen Fleknodalkurve und die Äquivalenz zweier Regelflächen.

Weise (Kiel).

Bell, P. O.: Differential geometry of a general motion in the complex projective line. Amer. J. Math. **71**, 427—442 (1949).

E. Cartan hat in seinen „Leçons sur la théorie des espaces à connexion projective“, Paris 1937, S. 28—42 (dies. Zbl. **16**, 76) die Geometrie der Bewegungen eines Punktes der komplexen Geraden unter dem Einflusse der Gruppe der reellen projektiven Transformationen entwickelt. Bei Deutung in der Gaußschen Zahlenebene handelt es sich dabei um die Entwicklung der Kurventheorie der Poincaréschen Halbebene nach der Methode des „repère mobile“, d. h. unter Verwendung eines geeigneten lokalen Bezugssystems, dessen Schicksal unter der genannten Gruppe die differentialgeometrischen Eigenschaften der Kurve zu beschreiben gestattet. Diese Cartansche Behandlungsweise dient Verf. als Vorbild bei seiner vorliegenden Arbeit, die der unter dem Einflusse der allgemeinen Gruppe der komplexen projektiven Transformationen entstehenden „Bewegungstheorie“ der komplexen Geraden gewidmet ist, d. h. bei Deutung in der Gaußschen Ebene: der Entwicklung einer Kurventheorie der Möbiusschen Kreisgeometrie. Ist t ein reeller Zeitparameter, so kann die lokale „Bewegung“ eines Punktes $z(t)$ durch ihre „projektive Geschwindigkeit“, d. h. durch die projektiv invariante Schwarzsche Ableitung von $z(t)$ nach t

$$2r = \{z, t\} = \frac{z'''}{z'} - \frac{3}{2} \left(\frac{z''}{z'} \right)^2 = R(z, t) + i J(z, t)$$

gekennzeichnet werden. Diese momentane Bewegung ist 1. für $J \neq 0$ loxodromisch, 2. für $J = 0$, $R < 0$ hyperbolisch, 3. für $J = 0$, $R > 0$ elliptisch, 4. für $J = 0$, $R = 0$ parabolisch. Als Bahnkurven konstanter projektiver Geschwindigkeit entstehen dabei in der Gaußschen Ebene Loxodromen (= logarithmische Doppelspiralen und logarithmische Spiralen) oder Kreisbüschel der drei verschiedenen Arten. — Will man eine der Gruppe angepaßte Metrik und Krümmungstheorie für die Kurven $z(t)$ einführen, so stünde der Inversionsbogen p und die Inversionskrümmung zur Verfügung, die (im Gegensatz zur Angabe des Autors) schon 1914 G. Pick (Rend. Circ. mat. Palermo **37**, 341) und nicht erstmalig Mullins (Columbia Diss. 1917) entdeckt hat: Ist $\{z, p\} = R(p) + iJ(p)$, und p der Inversionsbogen, so ist $J(p) \equiv 1$, und $R(p)$ ist die Inversionskrümmung. Da dieser Bogen aber für Kreise identisch verschwindet und daher in den Scheiteln der Kurve versagt, führt Verf. eine neue Metrik ein, deren Bogenelement nirgends, außer in parabolischen Kurvenpunkten, verschwindet. Dieser „Projektivbogen“ (= „homographie“ arc length) stimmt auf den Geraden der Poincaréschen Halbebene (Halbkreisen über der reellen Achse) mit dem Poincaréschen nichteuklidischen Bogen überein. Man kann ihn so erklären: Es sei $\omega(t)$ die (der Differentialgleichung $\omega'' + r \cdot \omega = 0$ genügende) Normalkoordinate des auf der Kurve C bewegten Punktes und

$$\zeta = \omega + i\omega'/\sqrt{r}, \quad \eta = \omega - i\omega'/\sqrt{r}$$

das Paar der Fixpunkte jener Kurve $r = \text{const.}$ (Loxodrome, Kreis), die C in ω berührt. Dann lautet das „Projektivbogenelement“ der Kurve C im Punkte $\omega(t)$

$$d\sigma = 2\sqrt{|r|} dt = |\log DV(\zeta, \eta, \omega(t), \omega(t+dt))|.$$

Die geometrische Deutung dieses Linienelements benutzt einen einfach definierten Winkel. Allgemein ist der „Projektivabstand“ für zwei Punkte P, Q nach Wahl zweier absoluter Punkte ζ, η : $\overline{PQ} = |\log DV(\zeta, \eta, P, Q)|$. Als gerade Linien („s-Linien“) dieser Metrik erhält man dann die Loxodromen und Kreise (oder deren Orthogonalkurven) durch die absoluten Punkte ζ, η . Man kann ihre Punkte ω darstellen durch $\omega = \zeta + e^w \eta$, wobei $w = \tau + i\vartheta$ eine komplexe Verbindung der Normalkoordinaten (τ, ϑ) ist. Als projektiver Abstand zweier Punkte ω, ω_0 ergibt sich dann $|\log(\zeta, \eta, \omega_0, \omega)| = [(\tau - \tau_0)^2 + (\vartheta - \vartheta_0)^2]^{\frac{1}{2}}$. Die Punkte ζ, η sind daher Fernpunkte der Metrik und die Abbildung zwischen den Ebenen w und z ist konform, wobei der geraden Linie der w -Ebene die s -Linien der z -Ebene entsprechen. Nach der letzten Formel wird dabei die z -Ebene mit ihrer Geometrie in die euklidische Geometrie der w -Ebene umgesetzt. *Strubecker.*

Backès, F.: Sur des couples de surface applicables en géométrie cayleyenne. Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. **35**, 417—423 (1949).

Es handelt sich um nichteuklidische Verallgemeinerungen von Sätzen, die Verf. in *Mathesis* **57**, 393—396 (1948) veröffentlicht hat. Der formale Apparat benutzt die Methode des selbstpolaren begleitenden Tetraeders (O_1, O_2, O_3, O_4), wie es nach Demoulin [C. r. Acad. Sci., Paris **139**, 393—396 (1904)] Verf. schon in seiner Arbeit Acad. Belgique, Bull. Cl. Sci., V. S. **17**, 683—691 (1931) verwendet hat. Die Koordinaten (x, y, z, t) der Punkte der nichteuklidischen Räume werden durch die Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$ normiert. Beschreibt O_4 eine Fläche und O_3 die Polarfläche, sind ferner $O_4 O_1, O_4 O_2$ die Hauptkrümmungsrichtungen von O_4 und $O_3 O_1, O_3 O_2$ jene von O_3 , so sei $N = (x, y, 0, t)$ ein beliebiger Punkt der Tangentenebene in O_4 . Sind dann Q, Q' zwei Punkte, deren Strecke O_3 und N als Mittelpunkte hat, so werden die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür aufgestellt, daß die von Q und Q' beschriebene Flächen aufeinander abwickelbar sind. Diese Flächen hängen von einer willkürlichen Funktion ab. — Zu anderen Paaren aufeinander abwickelbarer Flächen kann man auf die folgende Art gelangen. Man

nehme wie oben in der Tangentenebene von O_3 einen Punkt $H(x, y, 0, t)$ und lege durch ihn eine Cliffordsche Parallele d (einer bestimmten Art) zu $O_3 O_4$. Sind dann P, P' zwei Punkte auf d , die H als eine ihrer Mitten haben, und hat die Strecke PP' konstante Länge, so kann die Forderung, daß die von P und P' beschriebenen Flächen aufeinander abwickelbar sind, stets dann erfüllt werden, wenn die Fläche der Punkte O_4 eine nichteuklidische Minimalfläche ist. Die Geraden $d = PP'$ beschreiben dabei eine isotrope Kongruenz (deren Fokalebenen Minimalebenen sind). Man erhält damit eine nichteuklidische Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von G. Darboux [Leçons sur la théorie des surfaces, IV, Paris 1896, p. 16]. Strubecker.

Riemannsche Mannigfaltigkeiten. Übertragungen:

Sorace, O.: Trasporti rigidi di vettori. Mat. Catania 3, 59—67 (1948).

Es handelt sich um die Integration des Differentialsystems

$$\frac{dR^i}{dt} + \sum_{h,k=1}^3 \left\{ \begin{matrix} h & k \\ i \end{matrix} \right\} R^k \dot{x}_k + \sum_{h=1}^3 \Gamma^i_h R^h = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

für die kovarianten Komponenten eines allgemeinen Vektors R längs des Weges $x_i = x_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) in einem dreidimensionalen Riemannschen Raum V_3 mit der Metrik a_{ij} . Γ^i_h ist dabei ein zweifach kontravarianter schiefsymmetrischer Tensor in V_3 . Verf. führt das Integrationsproblem auf die Lösung einer Volterra'schen Integralgleichung zweiter Art

$$\beta(t) = k(t) - \int_{t_0}^t N(t, s) \beta(s) ds$$

zurück. Für die Funktionen N, k ergibt sich der folgende Zusammenhang mit der Metrik des Raumes:

$$N(t, s) = \sum_{i=1}^2 f_i(s) \int_s^t f_i(x) dx, \quad f_1(t) = \sqrt{\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} n^i n^j},$$

$$k(t) = \beta_0 - \sum_{i=1}^2 a_{i0} \int_{t_0}^t f_i(x) dx, \quad f_2(t) = - \sum_{i,r,s=1}^3 \varepsilon_{irs} (n^i) n^s \dot{x}_r \sqrt{\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} n^i n^j}.$$

Dabei bedeuten n^i die Komponenten eines gewissen mit der Übertragung verknüpften Vektors.

M. Pinl (Dacca).

Urban, Alois: Note on the T. Y. Thomas' paper: On the projective theory of two dimensional Riemann spaces. Časopis Mat. Fysiky, Praha 73, 89—92 und tschechische Zusammenfassg. 92 (1948).

Es bedeute K die Gaußsche Krümmung eines zweidimensionalen Riemannschen Raumes R_2 mit dem Fundamentaltensor $a_{\mu\lambda}$. Ist a die Diskriminante von $a_{\mu\lambda}$ und wird K^μ durch $K^\mu = a^{\mu\lambda} \partial K / \partial x^\lambda$ erklärt, dann ist $\mathfrak{K}^\mu = a K^\mu$ eine kontravariante Vektordichte vom Gewicht $+2$. T. Y. Thomas bewies, daß \mathfrak{K}^μ eine projektive Invariante des R_2 ist. (Invariant gegenüber Transformationen, die die Geodätischen wieder in ebensolche überführen.) Verf. zeigt nun, in welcher Weise sich \mathfrak{K}^μ mit Hilfe des Projektivkrümmungstensors eines zum projektiven Riemannschen Raum gehörigen projektiven Zusammenhanges darstellen läßt. O. Varga (Debrecen).

Samuel, P.: Generalization to a space of Weyl of the problem of the tensors with covariant derivatives zero. Ann. Math., Princeton, II. S. 48, 268—273 (1947).

In einer früheren Arbeit [C. r. Acad. Sci., Paris 220, 160 (1945)] hat der Verf. diejenigen Riemannschen Räume bestimmt, in denen neben dem metrischen Fundamentaltensor $g_{\alpha\beta}$ weitere quadratische Tensoren mit verschwindender kovarianter Ableitung existieren. Überträgt man diese Frage auf einen Weylschen Raum mit dem Fundamentaltensor $h_{\alpha\beta}$ ($h_{\alpha\beta,\gamma} = a_\gamma h_{\alpha\beta}$) und dem kovarianten Tensor $b_{\alpha\beta}$ mit $b_{\alpha\beta,\gamma} = 0$ und führt die Hauptrichtungen des gemischten Tensors b_α^λ ($b_{\alpha\beta} = h_{\alpha\lambda} b_\beta^\lambda$)

als nichtholonome Basis ein, so folgt, daß für verschiedene Hauptwerte $S_\alpha \neq S_\beta$ die Hauptrichtungen stets als holonome Koordinatenrichtungen genommen werden können und $a_\gamma = H_{,\gamma}$ ein Gradient ist. Damit wird aber bei geeigneter Normierung der Weylsche Raum ein Riemannscher Raum: $g_{\alpha\beta} = e^{-H} h_{\alpha\beta}$. Im Fall eines gemischten Tensors b_α^β mit $b_{\alpha,\gamma}^\beta = 0$ läßt sich ebenfalls durch eine Koordinatentransformation die Diagonalgestalt erreichen, wobei die Hauptwerte S_α Konstante werden, und es sind je nach der Anzahl der verschiedenen Hauptwerte verschiedene Fälle zu unterscheiden. Sind alle Hauptwerte gleich, so bleibt nur der triviale Fall $b_\alpha^\beta = c \delta_\alpha^\beta$; sind mindestens drei verschiedene Hauptwerte vorhanden, so geht der Weylsche in einen Riemannschen Raum über. Für zwei Hauptwerte $S_\lambda \neq S_\mu$ hat man im symmetrischen Fall $b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}$ eine Aufspaltung des Weylschen Raumes in zwei Riemannsche Räume mit verschiedenen Normierungsfunktionen. Es wird schließlich auch noch der Fall konjugiert komplexer Hauptwerte behandelt. Weise.

Levine, Jack: Fields of parallel vectors in projectively flat spaces. Duke math. J. 16, 23—32 (1949).

Für eine projektiv-euklidische Mannigfaltigkeit P_n gibt es bekanntlich stets ein Koordinatensystem, in welchem bei beliebigem kovariantem Vektorfeld ψ_i

$$\Gamma_{jk}^i = -(\delta_j^i \psi_k + \delta_k^i \psi_j)$$

gilt. Unter Verwendung solcher Koordinaten zeigt Verf., daß in einem P_n ($n \geq 2$), der genau p Felder von parallelen kovarianten Vektoren λ_α^i ($i = 1, \dots, n; \alpha = 1, \dots, p$) gestattet, dieselben entweder auf die kanonische Form

$$\lambda_\gamma^i = e^\gamma \delta_\gamma^i \quad (\gamma = 1, \dots, p-1), \quad \lambda_p^i = x^i e^p, \quad e^p = x^p \Phi\left(\frac{x^{p+1}}{x^p}, \dots, \frac{x^n}{x^p}\right)$$

oder auf die Gestalt

$$\lambda_\alpha^i = e^\alpha \delta_\alpha^i, \quad e^p = E(x^{p+1}, \dots, x^n)$$

gebracht werden können. Eine invariante Charakterisierung des P_n anzugeben ist — wie Verf. selbst bemerkt — nicht gelungen. In dieser Hinsicht ergab sich als notwendige Bedingung — von der bei der Herleitung des obigen Ergebnisses übrigens Gebrauch gemacht wurde — daß der, aus dem zu Γ_{ij}^h gehörigen Krümmungsaffinor B_{ijk}^h durch Verjüngung hervorgehende Affinor $B_{ij}^h \equiv B_{ijh}^h$ symmetrisch sein muß. Verf. behandelt auch die Frage für parallele kovariante Vektorfelder. Es zeigt sich, daß für die Anzahl p der Vektorfelder nur die Fälle $p = 1$ oder $p = n$ möglich sind. Letzter Fall charakterisiert die gewöhnliche Affingeometrie. Falls $p = 1$, ist das Vektorfeld λ_i ein Gradientenfeld $\lambda_i = \partial\lambda/\partial x^i$. Für den Skalar gibt Verf. folgende Deutung: In einem E_{n+1}^* , in dem $(x^1, x^2, \dots, x^n, \lambda)$ rechtwinklige Koordinaten bedeuten, stellt die λ definierende Gleichung eine Regelfläche dar, deren $(n-1)$ -dimensionale Erzeugende parallel zur Hyperebene $\lambda = 0$ sind. Symmetrie der B_{ij} ist hier nicht notwendig. Ist dies der Fall, so kann λ bei zweckmäßiger Wahl der Koordinaten in einer der beiden Formen $\lambda = H(x^1/x^2)$, $\lambda = J(x^1)$ dargestellt werden. Im ersten Falle wird die Regelfläche ein verallgemeinertes gerades Konoid, im zweiten Falle ein Hyperzylinder. Schließlich wird eine invariante notwendige Bedingung für den P_n für den Fall eines kovarianten Vektorfeldes angegeben. O. Varga.

Alardin, Félix: L'autoparallélisme des courbes extrémales dans les espaces métriques fondés sur la notion d'aire. J. Math. pur. appl., Paris, IX. S. 27, 255—336 (1948).

E. Cartan hat eine metrische Geometrie aufgebaut, die auf dem Inhaltsmaß eines Hyperflächenbereiches beruht [Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire, Actual. sci. industr. Nr. 72, Paris 1933; dies. Zbl. 8, 272]. Das Grundlelement der Cartanschen Theorie ist nicht der Punkt, sondern ein orientiertes Hyperflächenelement (H. E.). Wird im n -dimensionalen Punktraum x^i die Stellung eines H. E. durch die homogenen Koordinaten u_i bestimmt, so ist die zugrunde liegende Mannigfaltigkeit $(2n-1)$ -dimensional und durch (x, u)

bestimmt. Sämtliche auftretende Größen sind in bezug auf ein (x, u) -H. E. bestimmt und in den u_i von nullter Dimension homogen. Die zu konstruierende Geometrie ordnet sich dann zunächst der Theorie euklidisch zusammenhängender Mannigfaltigkeiten von H. E. unter. Letzteres besagt folgendes: 1.) Für den im (x, u) -H. E. bestimmten infinitesimalen Vektor dx^i ist das Quadrat seiner Länge ds^2 durch die positiv definite Form (1) $ds^2 = g_{ik}(x, u) dx^i dx^k$ bestimmt. 2.) Das durch

$$(2) \quad D\xi^i = d\xi^i + C_k^{ih}(x, u) \xi^k du_h + \Gamma_{kh}^i(x, u) \xi^k dx^h$$

bestimmte invariante Differential eines Vektorfeldes $\xi^i(x, u)$ ist metrisch, d. h. die durch $D\xi^i = 0$ bestimmte Parallelübertragung erhält die Länge und den Winkel von Vektoren. Dies führt zu

$$(3) \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^h} = \Gamma_{ikh} + \Gamma_{kjh}, \quad \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^h} = C_{ik}^h + C_{hi}^h.$$

Die Homogenitätsforderung bezüglich u_i ergibt, daß Γ_{ikh} von nullter, C_k^{ih} von (-1) -ter Dimension homogen in den u_i ist und daß außerdem (a) $C_k^{ih} u_h = 0$ gilt. Die Cartansche Geometrie ordnet sich nun folgendermaßen der Theorie dieser euklidischzusammenhängenden Mannigfaltigkeit von H. E. unter. Gegeben sei eine als hinreichend oft differenzierbar vorausgesetzte Funktion $L = L(x, u)$, die wesentlich positiv ist. Dann werde gefordert, daß das in einem (x, u) -H. E.

gelegene Element irgendeiner $(n-1)$ -dimensionalen Oberfläche durch $dS = \frac{L(x, u)}{u^n} dx^1 \dots dx^{n-1}$

bestimmt ist. E. Cartan hat nun eine Reihe invarianter Forderungen angegeben, durch welche der euklidischzusammenhängende Raum, d. h. die Größen g_{ik} , C_{ik}^h und Γ_{ikh} , durch $L(x, u)$ bestimmt ist. In der Cartanschen Theorie zeigt sich, daß die Extremalen des Variationsproblems $\int ds$ und die durch die Parallelübertragung bestimmten autoparallelen Kurven im allgemeinen nicht übereinstimmen. Verf. ist es nun gelungen, solche Forderungen aufzustellen, die den Zusammenhang und die Metrik ebenfalls eindeutig bestimmen und gegenüber der Cartanschen Theorie den Vorteil besitzen, daß autoparallele Kurven und Extremalen stets zusammenfallen.

Die Forderungen, die zur Bestimmung der g_{ik} und C_{ik}^h führen, sind bei Verf. dieselben wie bei E. Cartan. Der Unterschied tritt bei der Bestimmung der n^3 Größen Γ_{ikh} hervor. Cartan kommt zu den $\frac{1}{2} n^2 (n-1)$ Gleichungen, die zusammen mit (3) gerade n^3 Gleichungen für ebensoviel Unbekannte liefern, folgendermaßen: Wegen Gleichungen (a) gibt es eine nur vom Ort abhängige, d. h. von den u_i unabhängige Übertragung des Normaleinheitsvektors eines H. E. Wird nun längs einer Kurve ein solches Feld von H. E. gewählt und bezeichnet Γ_{ikh}^* die zugehörigen Übertragungsparameter, dann stellt E. Cartan die Forderung (4) $T_{kh}^i \equiv \Gamma_{kh}^{*i} - \Gamma_{hk}^{*i} = 0$.

Die Bestimmung der Γ_{ikh} ist dann in eindeutiger Weise möglich, falls die Diskriminante eines gewissen Tensors H^{ij} nicht verschwindet. Diese Räume bezeichnet Cartan als regulär. Verf. bestimmt in seiner Theorie den Zusammenhang dadurch, daß er für die Torsion, die einem infinitesimalen Zyklus von H. E. entspricht, wobei noch der Normalvektor der H. E. parallel verschoben ist, eine Vorschrift invarianter Natur trifft. Diese Vorschrift bewirkt, daß nicht der durch (4) bestimmte Affinor T_{kh}^i verschwindet, sondern ein solcher, der aus demselben noch durch Addition eines zusätzlichen Affinors besteht. Diese Beziehungen geben wieder zusammen mit (3) genau n^3 Gleichungen zur Bestimmung der Γ_{ikh} . Auch hier hängt die eindeutige Auflösbarkeit von dem Nichtverschwinden der Diskriminante eines Tensors K^{ij} ab. Die Resultate des Verf. ermöglichen es, E. Cartans Satz über die Äquivalenz der zu mehrfachen Integralen gehörigen Geometrien beträchtlich zu verallgemeinern. Es ergibt sich nämlich: Jedes mehrfache Integral, für welches eine der beiden Diskriminanten $|H^{ij}|$, $|K^{ij}|$ von Null verschieden ist, gestattet eine Gruppe von Punkttransformationen, die höchstens von $\frac{1}{2} n(n+1)$ Parametern abhängt. Verf. entwickelt ferner die Kurven- und Flächentheorie mit Hilfe der Methode des beweglichen n -Beins. Schließlich wird der zum n -fachen Integral

$$\int \dots \int (p_1^2 + \dots + p_n^2) dx^1 \dots dx^n; \quad p_\alpha = -\frac{u_\alpha}{u_{n+1}} \quad (\alpha = 1, \dots, n)$$

gehörige $n+1$ -dimensionale hyperharmonische Raum studiert.

O. Varga (Debrecen).

Busemann, Herbert: Angular measure and integral curvature. Canadian J. Math. 1, 279—296 (1949).

Den Ausgangspunkt der Arbeit bildet eine Auseinandersetzung der topologischen und maßtheoretischen Begriffe, die in der klassischen Flächentheorie dem Gauß-Bonnetschen Satz zugrunde liegen. Nach des Verf. Auffassung drückt der Satz eine Beziehung zwischen der inneren Winkelmessung und der Topologie der Fläche aus. Bezeichnet E eine topologische Ebene, dann werden aus den Eigenschaften des Geradensystems in der Euklidischen Ebene folgende abstrahiert: I. Jedes Element G des Systems ist ein offener Jordan-Bogen; d. h. das stetige, eindeutige Bild der Zahlengeraden $q = q(t)$, $-\infty < t < +\infty$. II. Jedes G ist in E abgeschlossen. III. Durch je zwei verschiedene Punkte in E geht ein und nur ein G . Ein

System, das I, II und III erfüllt, heißt ein S -System — kurz S — in E . In S werden nach euklidischem Muster Halbstrahlen (oder Beine), Zwischenrelation, Strecken, Dreiecke, Winkel, Winkelkonvergenz definiert. Die Winkel sind mit D bezeichnet. Die Axiome für ein Winkelmaß $|D|$ lauten \mathfrak{W}_1 : $|D| \geq 0$ (Nichtnegativität); \mathfrak{W}_2 : $|D| = \pi$, dann und nur dann wenn die Winkelbeine entgegengesetzt sind (Normalität); \mathfrak{W}_3 : Haben zwei Winkel D_1 und D_2 einen und nur einen Halbstrahl gemeinsam, dann gilt $|D_1 \cup D_2| = |D_1| + |D_2|$ (endliche Additivität); \mathfrak{W}_4 : Aus $D_\nu \rightarrow D$ folgt $|D_\nu| \rightarrow |D|$ (Stetigkeit). Allgemeiner legt Verf. eine Fläche (d. h. eine zusammenhängende, zweidimensionale Mannigfaltigkeit) M zugrunde, über welche er folgende Annahme macht: \mathfrak{G}_1 : Jeder Punkt p auf M besitzt eine mit der euklidischen Ebene homöomorphe Nachbarschaft $U(p)$ (ausgezeichnete Nachbarschaft), die mit einem I, II, III, erfüllenden Kurvensystem S versehen ist. \mathfrak{G}_2 : Gehören a, b, c dem Durchschnitt $U(p) \cap U(q)$ an, dann liegt b zwischen a und c in bezug auf S_p , wenn dasselbe gilt in bezug auf S_q . \mathfrak{W} : Jede ausgezeichnete Nachbarschaft ist mit einem S_p -Winkelmaß versehen, derart, daß alle diese Maße paarweise konsequent sind. (D. h., für je zwei solche Maße S_p, S_q soll gelten: Gehören a, b, c dem Durchschnitt $U(p) \cap U(q)$ an, so ist der Winkel der S_p -Halbstrahlen $a \rightarrow b$ und $a \rightarrow c$ im S_p -Winkelmaß gleich dem Winkel der S_q -Halbstrahlen $a \rightarrow b$ und $a \rightarrow c$ im S_q -Winkelmaß.) Die betrachteten Dreiecke beziehen sich auf ein S_p -System; der Exzeß $\varepsilon(abc)$ des Dreiecks abc wird als Differenz zwischen der Summe der Maße der Scheitelwinkel und π definiert. Ist das Vorzeichen des Exzesses des Dreiecks abc in einer Nachbarschaft des Punktes p positiv, nichtnegativ, negativ, nichtpositiv, dann heißt p von positiver, nichtnegativer, negativer, nichtpositiver Gaußscher Krümmung. Mit Hilfe dieser Definition überträgt Verf. klassische Ergebnisse über kompakte Riemannsche Räume, die Topologie und Vorzeichen der Gaußschen Krümmung verknüpfen. Im Falle einer nicht-kompakten Fläche M setzt er eine allgemeine Finslersche Metrik [Local metric geometry, Trans. Amer. math. Soc. **56**, 200—274 (1944); 215] voraus; S_p ist das System der geodätischen Linien auf $U(p)$. Das Winkelmaß bleibt allgemein, eventuell durch eine weitere Uniformitätsbedingung eingeschränkt. Cohn-Vossens Untersuchungen [Compositio math., Groningen **2**, 69—133 (1935); Mat. Sbornik, n. S. **1**, 139—164 (1936); dies. Zbl. **11**, 225, **14**, 276]; werden dementsprechend erweitert, meistens unter Aufrechterhaltung der ursprünglichen Beweisprozesse. Im letzten Abschnitt wird unter Annahmen $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$ und \mathfrak{W} die Erweiterung der Exzeßfunktion zu einem Radon-Maß, dem Totalkrümmungsmaß, skizziert. Dieser Prozeß ist das innere Gegenstück zur Oberflächenfunktion von Fenchel und Jessen [Danske Vid. Selsk. mat.-fys. Medd. **16**, Nr. 3 (1938); dies. Zbl. **18**, 424], die ein Radon-Maß auf der Einheitskugel darstellt. Die Gaußsche Krümmung tritt als Dichte auf, falls in M ein Flächenmaß definiert ist.

Chr. Pauc (Kapstadt).

Allgemeine metrische Geometrie. Konvexe Gebilde:

Colmez, J.: Sur certains systèmes triples orthogonaux paratingents. Ann. sci. École norm. sup., III. S. **65**, 71—99 (1948).

Ce mémoire constitue une continuation et une extension des recherches de Llensa sur les systèmes triples orthogonaux paratingents du point de vue de la géométrie infinitésimale directe [Thèse, Paris, 1947; publications antérieures: Bull. Sci. math., II. S. **65**, 225—250 (1941); C. r. Acad. Sci., Paris **220**, 297—298 (1945); **222**, 845—847 (1946); ce Zbl. **26**, 79]. Les systèmes triples orthogonaux considérés ici consistent dans les surfaces de niveau de trois fonctions $u(x, y, z)$, $v(x, y, z)$, $w(x, y, z)$ définies sur un domaine borné (ensemble ouvert et simplement connexe) de l'espace euclidien E_3 et possédant des gradients continus, non nuls et orthogonaux deux à deux. L'équation de Darboux-Lamé utilisé par Llensa est remplacée par l'équation plus générale (E): $|\text{grad } u| = F(M, u)$, où $F(M, u)$ représente une fonction positive définie sur un domaine R de l'espace (x, y, z, u) , continue en u et possédant des dérivées secondes continues en x, y, z . Une solution u de (E) pourvue de dérivées premières continues en x, y, z est appelée intégrale paratingente. Toute section $u = u_0$ d'une intégrale paratingente est de courbure bornée (phénomène de superdérivabilité); inversement toute surface de courbure bornée dans $R(u_0)$ (section de R par $u = u_0$) est une u_0 -section d'une intégrale paratingente définie de manière unique. Si les surfaces de niveau Σ_{u_0} (dans E_3) d'une intégrale paratingente peuvent être insérées dans un système triple orthogonal paratingent, elles admettent une normale dérivable vis-à-vis de v et de w . Les résultats de Bouligand sur les trajectoires orthogonales des surfaces d'un système triple orthogonal paratingent lorsque ces dernières sont des plans [Bull. Math. Soc. Roumaine Sci. **35**, 57—67 (1933); ce Zbl. **8**, 410] sont étendus à des systèmes „réguliers“.

la régularité s'exprimant par des conditions de dérivabilité. Inversement, des hypothèses de régularité sur les trajectoires orthogonales impliquent que les surfaces correspondantes ont une courbure bornée. Ce mémoire termine sur une nouvelle généralisation du théorème de Dupin. — Dans l'étude de l'équation (E) , des méthodes classiques employées dans la théorie de Hamilton-Jacobi sont transposées, dans le cas d'une indicatrice circulaire. Les transversales sont ici trajectoires orthogonales des Σ_u ; elles sont caractérisées parmi les courbes à tangente continue par la propriété de minimiser pour $u > u_0$ la solution de l'équation $dT/ds = F(M(s), T)$ prenant sur une Σ_{u_0} fixe la valeur u_0 . Les solutions à surfaces de niveau sphériques (au sens de Finsler) dans la théorie de Hamilton-Jacobi sont introduites sous le nom d'intégrales semi-paratingentes; elles constituent une solution complète de (E) . — Les définitions, les démonstrations et les hypothèses ont été soigneusement étudiées; elles ont parfois une apparence compliquée, par exemple la condition de régularité signalée plus haut. Les problèmes topologiques dont dépend une étude globale des solutions de (E) ne sont pas abordés. *Chr. Pauc (Le Cap).*

Pepper, Paul M.: A new method in imbedding theorems. Rep. math. Colloqu., Indiana, II. S. 8, 39—48 (1948).

Les théorèmes 3.6, 3.7 énoncés par B. J. Topel et l'A. [Imbedding theorems under weakened hypotheses, Rep. math. Colloqu., Indiana, II. S. 4, 31—55 (1943)] sont démontrés ici par une nouvelle méthode qui permet d'obtenir des résultats améliorés et plus précis. Cette méthode „combinatoire“ ne fait pas appel à la notion de quasi-congruence, et repose sur le lemme suivant: soit E un espace d'un système congruent Σ tel que tout élément de Σ dont les k -sous-espaces s'appliquent (congruement) dans E , s'applique lui-même dans E . Il existe alors une fonction $G(N)$, telle qu'il existe un N -point élément de Σ , non applicable dans E , qui possède exactement $G(N)$ k -sous-espaces non applicables dans E . Connaissant une borne inférieure de $G(k)$, on peut en déduire une borne inférieure de $G(k+j)$, construite à l'aide de coefficients binomiaux. Deux théorèmes de structure permettent à l'A. d'obtenir cette borne inférieure dans le cas de R^n et $S^n(d)$, sphère de diamètre d . Par exemple: Si S est un espace semi-métrique d'au moins $n+4$ points non applicable dans R^n , S contient au moins 3 $(n+3)$ -sous-espaces non applicables dans R . Pour $S^n(d)$, la condition est plus délicate. La formule s'applique alors, et donne les trois théorèmes fondamentaux du Mémoire. Le paragraphe final donne un début d'axiomatisation de la théorie. *Thom (Pfaffenhofen).*

Groot, J. de: Phantasie von Punkt zu Punkt. Euclides, Groningen 24, 243—253 (1949) [Holländisch].

In dieser populär gehaltenen Antrittsvorlesung behandelt Verf. das sog. „Sandwich“-Problem und die Aufgabe, eine Kreisscheibe in zwei untereinander kongruente und punktfremde Teile zu zerlegen. Das erste Problem lautet im Raume: Ist es möglich, eine Ebene zu konstruieren, die jeden von drei gegebenen Körpern halbiert? Das zweidimensionale Analogon ist leicht zu lösen mit den bekannten Prinzipien der reellen Funktionen. Auf die Schwierigkeit der Aufgabe im dreidimensionalen Raum wird nur hingewiesen. — Die Zerlegungsaufgabe des Kreises wird im verneinenden Sinne beantwortet. Das verwandte Problem für irgendeine Scheibe mit Mittelpunkt scheint außerordentlich schwierig zu sein und ist bis jetzt noch nicht gelöst worden. *J. C. H. Gerretsen (Groningen).*

Horn, Alfred and F. A. Valentine: Some properties of L sets in the plane. Duke math. J. 16, 131—140 (1949).

Man nennt S einen L_n -Bereich, wenn je zwei Punkte von S durch ein aus höchstens n Strecken bestehendes Polygon verbunden werden können. Verff. untersuchen hauptsächlich die L_2 -Bereiche. Von nun an bezeichnet S einen L_2 -Bereich. Die beschränkten Komplementärmengen von S sind L_2 -Bereiche. Durch jeden Punkt der unbeschränkten Komponente der Komplementärmenge geht eine zu S fremde

Gerade, diese Menge ist also ein L_2 -Bereich. Wenn S einfach zusammenhängend ist, so ist es die Vereinigungsmenge von konvexen Bereiche, die sich paarweise schneiden. Betrachten wir einen konvexen Bereich, die flächenhalbierenden Geraden dieses Bereiches, und die Menge S , durch deren Punkte wenigstens zwei flächenhalbierende Gerade gezogen werden können. S ist eine einfach zusammenhängende L_2 -Menge.

Fáry (Paris).

Klee jr., V. L.: A characterization of convex sets. Amer. math. Monthly 56, 247—249 (1949).

Eine innere Punkte enthaltende abgeschlossene Menge S in E_n (n -dimensionaler euklidischer Raum) ist dann und nur dann konvex, wenn für jedes $p \in E_n - S$ der nächste Punkt q auf S für eine nicht beschränkte Menge von Punkten der nächste Punkt von S ist.

Fáry (Paris).

Gustin, William: On the interior of the convex hull of an euclidian set. Bull. Amer. math. Soc. 53, 299—301 (1947).

Die konvexe Hülle der Punkte $\pm e_i$ ($i = 1, \dots, n$; Einheitspunkte) im n -dimensionalen euklidischen Raum E_n enthält den Ursprung im Inneren, das gilt aber nicht mehr von einer Teilmenge von $\{\pm e_i\}$. Verf. beweist den Satz: p sei im Inneren der konvexen Hülle einer Menge M . Es gibt eine höchstens $2n$ Punkte enthaltende Teilmenge von M , deren konvexe Hülle p im Inneren enthält.

Fáry (Paris).

John, Fritz: Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions. Studies Essays, pres. to R. Courant, 187—204 (1948).

$F(x)$ sei definiert auf einer Punktmenge R des Euklidischen R_n , ebenso $G(x, y)$ für jedes y einer kompakten Menge S des metrischen Raumes der Parameter y . R' sei die Menge aller x , für die $G(x, y) \geq 0$ für alle $y \in S$. Hat $F(x)$ in dem inneren Punkte x^0 von R , der zu R' gehört, ein relatives Minimum bezüglich R' und besitzen F und G in x^0 für $y \in S$ partielle Ableitungen nach den x , so gibt es s Punkte y^r ($r = 1, 2, \dots, s$), $y^r \in S$, $0 \leq s \leq n$ und $s + 1$ Zahlen $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_r > 0$, so daß die Funktion $\Phi(x) = \lambda_0 F(x) + \sum_{r=1}^s \lambda_r G(x, y^r)$ in x^0 verschwindende partielle Ableitungen nach den x hat. — Gibt es umgekehrt für die Stelle x^0 s Punkte y_r und $s + 1$ Zahlen λ_0, λ_r dieser Art und hat die Matrix der partiellen Ableitungen von $F(x)$ und $G(x, y^r)$ nach den x an der Stelle x^0 den Rang n , so hat F in x^0 ein relatives Minimum bezüglich aller Nachbarpunkte, die den Bedingungen $G(x, y^r) \geq 0$, $r = 1, \dots, s$, genügen, also um so mehr bezüglich R' . — Als Anwendung dieser Verallgemeinerung der Multiplikatorenregel von Lagrange gibt Verf. eine neue Herleitung der Jungschen Beziehung $D \geq R \sqrt{2(m+1)/m}$ zwischen dem Durchmesser D und dem Umkugelradius R einer beschränkten Punktmenge im R_m und erörtert den Sonderfall einer Punktmenge auf einer Halbkugelfläche. — Betrachtung des Ellipsoids vom kleinsten Inhalt, daß einer beschränkten Punktmenge M des R_m umschrieben ist; verkleinert man es ähnlich vom Mittelpunkt aus im Verhältnis $1/m$, so liegt die neue Fläche in der konvexen Hülle der Menge. Hat die Menge einen Mittelpunkt, so gilt das gleiche beim Verhältnis $1/\sqrt{m}$. Die Schranken sind scharf. — Vermutung (für $m = 2$ bewiesen von F. Behrend): Das Verhältnis zwischen dem Inhalt eines konvexen Körpers und dem Inhalt des kleinsten umschriebenen Ellipsoids ist minimal für das Simplex, bei Mittelpunktskörpern für den m -dimensionalen Würfel.

Bol (Freiburg).

Sz.-Nagy, Gyula: Zentralsymmetrisierung konvexer Körper. Publ. Math., Debrecen 1, 29—32 (1949).

Erneute Darstellung einiger bekannter Sätze über den Vektorbereich eines konvexen Körpers, durch die Verf. auf eine schon 1932 von ihm in ungarischer Sprache veröffentlichte Arbeit hinweisen will [Math.-naturw. Anz. Ungar. Akad. Wiss. 48, 832—847 (1932); dies. Zbl. 5, 113].

Bol (Freiburg).

Hadwiger, H.: Über konvexe Körper mit Flachstellen. *Math. Z.* **52**, 212—216 (1949).

Hat eine Stützebene eines konvexen Körpers mit diesem einen ebenen konvexen Bereich nichtverschwindender Oberfläche gemeinsam, so spricht man von einer Flachstelle; der Flachstellenradius ist der Inkreisradius des ebenen Bereiches. Ein Kalottenkörper einer Kugel entsteht, indem man von der Kugel durch ebene Schnitte Kalotten abtrennt, die sich gegenseitig nicht treffen sollen. Diese Körper entsprechen in gewissem Sinne den Kappenkörpern der Kugel dual. Analog zu einem Satze von Dinghas über Körper mit Ecken beweist Verf.: Ein Kalottenkörper K_0 einer Kugel sei zu einem konvexen Körper K mit Flachstellen volumgleich. Lassen sich die Kalotten von K_0 so eindeutig gewissen Flachstellen von K zuordnen, daß der entsprechende Flachstellenradius nicht kleiner ist als der von K_0 , so ist $F \geq F_0$, $M \geq M_0$. F , F_0 stellen hier die Oberflächen, M , M_0 die Integrale der mittleren Krümmung von K und K_0 dar. *Bol* (Freiburg):

Hadwiger, H.: Über Maßzahlen und Ungleichungen bei Mittelpunktseikörpern. *Mh. Math.*, Wien **53**, 132—137 (1949).

Aus einem zentralsymmetrischen konvexen Körper K bilde man den sternförmigen Körper K_ϱ wie folgt: Es sei P ein Randpunkt von K , ω die Stützebene in P , ω_ϱ die parallele Ebene im Abstand ϱ von ω , welche auf der dem Körper abgewandten Seite von ω liegt. S_ϱ sei die Strecke, die durch die Ebenen ω , ω_ϱ aus der Geraden OP ausgeschnitten wird (O ist der Mittelpunkt von K). Nun definiert man $K_\varrho = K + \sum S_\varrho$, wo die Summation auf alle Randpunkte von K auszudehnen ist. (Es gilt $K_\varrho \subseteq \bar{K}_\varrho$, wo \bar{K}_ϱ den äußeren Parallelkörper bezeichnet.) Man hat dann $\bar{V}_\varrho = V + F\varrho + \bar{M}\varrho^2 + \bar{C}\varrho^3$, wobei V , V_ϱ die Volumina von K , K_ϱ bezeichnen, F ist die Oberfläche von K , und die Konstanten \bar{M} , \bar{C} sind durch diese Relation definiert. Es gelten dann Gegenstücke der klassischen Ungleichungen:

$$\bar{M}^2 - 3\bar{C}F \leq 0, F^2 - 3\bar{M}V \leq 0, F^3 - 27\bar{C}V^2 \leq 0$$

(im umgekehrten Sinne, wie im klassischen Falle). Der Beweis ist nicht schwer, da für V_ϱ eine einfache Integraldarstellung gilt. *Fáry* (Paris).

Knothe, Herbert: Über Integralidentitäten auf Eiflächen. *An. Fac. Ci. Pôrto* **33**, 33—39 (1948).

P sei ein fester Punkt im Innern eines regulär gekrümmten konvexen Körpers K des R_n , Q ein beweglicher Punkt des Randes R , $d\sigma$ das Oberflächenelement dieses Randes, ω das sphärische Bild von PQ , $p(\omega)$ die Stützfunktion von K , $s = PQ$, $S_k(K_i) = \sum K_{i_1} K_{i_2} \cdots K_{i_k}$ die k -te elementarsymmetrische Funktion der Hauptkrümmungen K_i von R , $I_k = \int s^n S_k(K_i) d\omega$. Ist $I_k(\varepsilon)$ der Wert von I_k für die Parallelfläche nach außen von K im Abstand ε , so berechnet Verf. $dI_k/d\varepsilon$ für $\varepsilon = 0$ auf zweierlei Art und erhält so die Integralidentität

$$\int \tilde{p} \left| \frac{dS_k}{ds} \right|_{\text{Max}} d\sigma = \frac{1}{n-k-1} \cdot \int p \sum (K_{i_1} - K_{i_2})^2 K_{i_3} \cdots K_{i_{k+1}} d\sigma.$$

\tilde{p} ist hier die mit Vorzeichen versehene Projektion von $\bar{P}\bar{Q}$ auf die Richtung stärksten Anstiegs von S_k . Konstanz von einem S_k kennzeichnet also die Kugeln, wie zuerst Süss hervorgehoben hat. Das Kriterium läßt sich abschwächen; ist etwa a der Abstand von P zum Rand, A das Maximum von s und gilt für alle Q auf R

$$\left| \frac{dS_k}{ds} \right|_{\text{Max}} \leq \frac{1}{n-k-1} \frac{a}{A} (K_{i_1} - K_{i_2})^2 K_{i_3} \cdots K_{i_{k+1}},$$

so ist K eine Kugel.

Bol (Freiburg).

Knothe, Herbert: Über eine Vermutung H. Minkowskis. *Math. Nachr.*, Berlin **2**, 380—385 (1949).

Es handelt sich um die vor einigen Jahren [Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 15, 37—56 (1943)] vom Ref. bestätigte Vermutung, nach der in der für konvexe Körper gültigen Ungleichung $O^2 - 3MV \geq 0$ das Gleichheitszeichen nur für die Kappenkörper der Kugel steht. Verf. will dies auf den allgemeineren Satz zurückführen: Die volumgleichen konvexen Körper $K(\varepsilon)$ im R_n mögen für $\varepsilon \rightarrow 0$ der Grenzlage K zustreben; ist $d(\varepsilon, P)$ der Abstand des Randpunktes P von K zur Randfläche von $K(\varepsilon)$, so sei $d(\varepsilon, P) < A\varepsilon$ bei festem A für alle P . Weiter sei

$$\sqrt[n]{V((1-\vartheta)K + \vartheta K(\varepsilon))} = (1-\vartheta)\sqrt[n]{V(K)} + \vartheta\sqrt[n]{V(K(\varepsilon))} + o(\varepsilon^2)$$

für jedes ϑ mit $0 \leq \vartheta \leq 1$. Dann läßt sich $K(\varepsilon)$ so parallel verschieben, daß sogar $d(\varepsilon, P) = o(\varepsilon)$ für alle P , die einer Ausnahmемannigfaltigkeit der Dimension $n-3$ auf dem Rande von K nicht angehören. Ref. kann leider in den Ausführungen des Verf. nicht mehr sehen als den Versuch einer Beweisskizze. Bol (Freiburg).

Shiffman, Max: On the isoperimetric inequality for saddle surfaces with singularities. Studies Essays, pres. to R. Courant, 383—394 (1948).

Die isoperimetrische Ungleichung $A \leq L^2/4\pi$ gilt bekanntlich auch für einfach zusammenhängende Bereiche auf Flächen nichtpositiver Gaußscher Krümmung, sofern diese keine Singularitäten (Ecken, Kanten, Flachstellen) aufweisen. Verf. erweitert den Satz zunächst auf Polyederflächen, bei denen die an jeder Ecke im Innern des Bereiches zusammenstoßenden Winkel zusammen mindestens 2π betragen („Sattelpolyeder“). Als Hilfsmittel wird dabei verwendet, daß es auf einer solchen Fläche zwischen je zwei Punkten eine eindeutige kürzeste Verbindung gibt. Verallgemeinerung auf Flächen aus endlichvielen stetig gekrümmten Teilen nichtpositiver Gaußscher Krümmung, wobei an den Ecken die obige Bedingung gelten soll, während die geodätischen Krümmungen jeder Kante auf den beiden angrenzenden Flächen zusammen ≤ 0 sein sollen. Die Ungleichung gilt auch auf harmonischen Flächen im R_m , wenn diese Stellen haben, an denen $EG - F^2 = 0$. Bol.

Topologie:

Colmez, Jean: Sur les espaces à écarts. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 156—158 (1949).

Ein topologischer Raum E ist mit einer abstrakt geordneten Spanne (écart) erster (bzw. zweiter) Art ausgestattet, wenn es eine Abbildung $\sigma(x_1, x_2)$ von $E \times E$ in eine geordnete Menge S mit einem ersten Element 0 (wobei $S - \{0\}$ ohne erstes Element sein soll) gibt mit folgenden Eigenschaften: 1. $\sigma(x_1, x_2) = 0$ für und nur für $x_1 = x_2$; 2. die Mengen $[\sigma(\hat{x}, a)$ nicht $\geq \xi]$ (bzw. $[\sigma(\hat{x}, a) \leq \xi]$) bilden für $\xi \in S - \{0\}$ ein Umgebungssystem von a . Nach Definition verschiedener, den allgemeinen Charakter der Spanne weiter einschränkender Eigenschaften (Symmetrie, Regularität, Metrikeigenschaft) werden ohne Beweise eine Reihe von Sätzen mitgeteilt, welche die spannenmäßige Darstellung von Produkträumen, Charakterisierung der Spannenräume erster Art (spez. auch der halbmétrischen) und zweiter Art betreffen. Aumann (Würzburg).

Sitnikov, K.: Bestimmung der Dimension einer abgeschlossenen Menge durch metrische Eigenschaften des Komplementärspaces. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 66, 1059—1062 (1949) [Russisch].

Φ sei ein Kompaktum des Euklidischen Raumes R_n und $\Gamma = R_n - \Phi$. Umhüllung von Φ wird jeder $n-1$ dimensionale Zyklus in Γ genannt, der mit jedem Punkte von Φ verschlungen ist. Die untere Grenze aller $\varepsilon > 0$ derart, daß eine ε -Verschiebung von Φ in ein Kompaktum der Dimension $\leq p$ existiert, wird p -dimensionaler Durchmesser $\alpha^p \Phi$ von Φ genannt. Es sei $z = \{z_k\}$ ein Zyklus im R_n . Träger des Zyklus z ist jedes Kompaktum, das die Ecken aller z_k , von einem bestimmten k angefangen, enthält. Wenn der Zyklus z in jedem seiner Träger berandet,

so setzen wir für ihn das Maß der „Wesentlichkeit“ gleich 0; wenn jedoch z in einem Kompaktum Φ nicht berandet, so sei das Maß $\mu(z)$ der Wesentlichkeit von z die obere Grenze aller $\varepsilon > 0$, für welche ein solcher Träger Φ des Zyklus z existiert, daß z in einer ε -Umgebung des Kompaktums Φ nicht berandet. Es sei z ein Zyklus in Γ . Die untere Grenze der p -dimensionalen Durchmesser von Trägern solcher Zyklen, die in Γ dem Zyklus z homolog sind, wird p -dimensionaler Homologiedurchmesser des Zyklus z in Γ genannt und mit $\alpha_r^p z$ bezeichnet. Wir setzen überdies $\alpha_r^{-1} z = 1$ für jeden Zyklus z . Es wird folgender Satz bewiesen: Wenn die Dimension von Φ gleich r ist, $0 \leq r \leq n-1$, so gibt es eine Zahl $\alpha > 0$ derart, daß jede Umhüllung des Kompaktums Φ einen $r-1$ dimensionalen Homologiedurchmesser $> \alpha$ besitzt, während der r -dimensionale Homologiedurchmesser jedes Zyklus in Γ gleich 0 ist. Dann gibt es stets Umhüllungen von Φ mit beliebig kleinem Wesentlichkeitsmaß. Wenn jedoch $\dim \Phi = n$ ist, so gibt es eine Zahl $\alpha > 0$, so daß für jede Umhüllung z^{n-1} von Φ gilt: $\mu z^{n-1} > \alpha$. Thimm (Bonn).

Sitnikov, K.: Über einige metrische Eigenschaften der abgeschlossenen Mengen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 67, 229—232 (1949) [Russisch].

$A = (a_1, a_2, \dots, a_r)$ sei eine endliche Menge des metrischen Raumes R und x ein Punkt von R . Die Anzahl der Punkte von A , welche die Bedingung $\varrho(x, a_i) = \varrho(x, A)$ (ϱ = Entfernung) erfüllen, heißt Ordnung von x bezüglich A . Die Menge A besitzt im Raum R die Ordnung n , wenn es einen Punkt in R gibt, dessen Ordnung bezüglich A gleich n ist, und wenn kein Punkt von R bezüglich A größere Ordnung als n besitzt. Das n dimensionale Kompaktum Φ heißt metrisch regulär, wenn es bei beliebigem $\varepsilon > 0$ ein ε -Netz, das in Φ die Ordnung $n+1$ hat, enthält. Bewiesen werden die Sätze: 1. Jedes Polyeder ist ein metrisch reguläres Kompaktum. Genauer: Jedes ε -Netz des n -dimensionalen Polyeders P_n , das nicht nur aus isolierten Punkten besteht, kann durch beliebig kleine Verschiebung in ein ε -Netz überführt werden, dessen Ordnung in $P_n \leq n+1$ ist. — 2. Es gibt im 3-dimensionalen Raum ein Kompaktum, das nicht metrisch regulär ist. — 3. Jedes endlich-dimensionale Kompaktum Φ ist einem metrisch regulären Kompaktum homöomorph. Wenn die Dimension von Φ gleich n ist und Φ in R^{2n+1} liegt, so gibt es eine topologische Abbildung des Kompaktums Φ in den R^{2n+1} , die sich beliebig wenig von der identischen Abbildung unterscheidet und Φ in ein metrisch reguläres Kompaktum überführt. — Die bewiesenen Sätze werden herangezogen, um die Dimension von Kompakta mittels der metrischen Eigenschaften ihrer ε -Netze zu charakterisieren. Thimm.

Groot, J. de: Local connectedness and quasiorder. Proc. Akad. Wet. Amsterdam 51, 885—890 (1948).

Bezeichne $U(p)$ eine Umgebung von p in M , d.h. eine beliebige Menge, die p im Inneren enthält. Verf. nennt q die Quasiordnung (quasiorder) von p , wo $q = 0, 1, \dots, n, \dots, \aleph_0$, \aleph ist, wenn es beliebig kleine $U(p)$ gibt, deren Rand $U(\overline{M} - \overline{U})$ aus q Komponenten besteht; die Quasiordnung von p ist ω , wenn q endlich ist, aber $q \rightarrow \infty$. Die Quasiordnung von M ist das Maximum der Quasiordnungen seiner Punkte. Sätze: I. Ein Kontinuum ist dann und nur dann im kleinen zusammenhängend, wenn seine Quasiordnung $\leq \omega$ ist. II. Bei stetigen Abbildungen bleiben die Eigenschaften „die Quasiordnung ist $\leq \omega$ “ bzw. „die Quasiordnung ist $\leq \aleph_0$ “ erhalten. Verf. definiert das Quasigenus (quasigenus) ähnlich, wie man in der Kurventheorie das Genus definiert [K. Menger, Kurventheorie, Leipzig und Berlin 1932, S. 293; dies. Zbl. 5, 415] und skizziert den Beweis eines ähnlichen Invarianzsatzes. Fáry (Paris).

Dantzig, D. van: Divisibilité topologique d'un ensemble compact par un arc simple. Bull. Soc. math. France 75, 49—55 (1947).

Bezeichne E einen kompakten, separablen metrischen Raum, der durch Bögen gefasert ist: ein beliebiger Punkt von E ist genau in einem Bogen enthalten; durch

die Punkte einer konvergenten Folge gehende Bögen konvergieren gegen einen Bogen der Faserung. Verf. beweist, daß E dann und nur dann mit einem topologischen Produkt $\Omega \times I$ ($I: 0 \leq t \leq 1$) homöomorph ist, wenn die Bögen der Faserung kohärent und stetig orientiert werden können. Der Satz stammt aus dem Jahre 1927, kann also als eines der ersten Beispiele eines „topologischen Divisibilitäts-satzes“ betrachtet werden.

Fáry (Paris).

Freudenthal, Hans: Sur un théorème topologique de M. van Dantzig. Bull. Soc. math. France **75**, 56—62 (1947).

Verf. gibt eine Verallgemeinerung und einen neuen Beweis des oben besprochenen Satzes von van Dantzig. Der Raum R (oben E) wird metrisch separabel vorausgesetzt (Kompaktheit wird nicht verlangt). Die Hypothese von van Dantzig, daß R gefasert ist, wird durch die Hypothese ersetzt, das in R eine partielle Ordnung gegeben ist, die gewisse Zusammenhangeigenschaften besitzt. Aus diesen Voraussetzungen folgt, daß mit einem Punkte vergleichbare Punkte auf einem Bogen liegen und R mit einem topologischen Produkt homöomorph ist.

Fáry (Paris).

Kaplan, Samuel: Homology properties of arbitrary subsets of Euclidean spaces. Trans. Amer. math. Soc. **62**, 246—271 (1947).

1. Da endliche Überdeckungen zur Untersuchung der Homologieeigenschaften nicht kompakter Räume nicht mehr genügen, werden abzählbar unendliche (offene) Überdeckungen herangezogen, welche die Eigenschaft der „Stern-Endlichkeit“ haben, d. h. jedes Element der Überdeckung besitzt nur mit einer endlichen Anzahl der Elemente einen nichtleeren Durchschnitt. Zu jeder Überdeckung $\{U\}$ eines separablen metrischen Raumes gibt es eine abzählbare Stern-endliche Überdeckung $\{V\}$ derart, daß $\{V\}$ eine Verfeinerung von $\{U\}$ ist, d. h. jedes Element U ist in einem Element V enthalten. Abzählbare Stern-endliche Überdeckungen sind das Werkzeug zur Entwicklung der folgenden Theorie. — 2. Zum Studium der Homologieeigenschaften des topologischen Raumes A werden mittels der (in A offenen) Überdeckungen von A Čech-Zyklen und Čech-Homologiegruppen eingeführt. Ist A eine Teilmenge des topologischen Raumes R und $\{U\}$ eine (offene) Überdeckung von R , so bestimmen diejenigen Elemente von $\{U\}$, welche A treffen, eine Überdeckung von A mit der Festsetzung: Die Elemente U_0, U_1, \dots, U_k bilden ein Simplex des Nerven dieser Überdeckung, wenn $\bigcap_{i=0}^k U_i$ die Menge A schneidet. Auch auf

diese sogenannten „äußeren“ zur Unterscheidung von den oben erwähnten „inneren“ Überdeckungen kann eine Čech-Homologietheorie aufgebaut werden. Ist A eine abgeschlossene Teilmenge eines separablen metrischen Raumes, so sind die Homologiegruppen, gebildet aus inneren und äußeren Überdeckungen, isomorph. Für kompakte Čech-Zyklen, d. h. solche, die auf kompakten Teilmengen des Raumes R liegen, können entsprechende Vietoris-Zyklen gefunden werden. Für diese Vietoris-Zyklen wird eine topologisch invariante Berandungsdefinition gegeben, die mit der Berandungsdefinition der Čech-Zyklen äquivalent ist. — 3. Wenn die Teilmenge A des separablen metrischen Raumes R nicht abgeschlossen ist, brauchen die Čech-Homologiegruppen, bestimmt durch innere bzw. äußere Überdeckungen von A , nicht mehr isomorph zu sein. Um nun doch die Homologieeigenschaften von A mittels offener Mengen von R zu definieren, werden Überdeckungen der Umgebungen von A betrachtet. Unter Benutzung aller Umgebungsüberdeckungen von A und einer Definition der Verfeinerung werden Čech-Homologiegruppen erklärt; diese sind isomorph mit den Čech-Homologiegruppen, welche unter Verwendung der inneren Überdeckungen von A gefunden werden. — 4. Wenn K ein (im allgemeinen unendliches) Polyeder ist, so sind die Čech-, die Vietoris- und die klassischen Homologiegruppen von K isomorph. Ist A eine Teilmenge des Polyeders K , so können wir ihre Homologieeigenschaften, mittels der stetigen Zyklen in den Umgebungen von A untersuchen. Ein „geometrischer“ Čech-Zyklus von A ist eine Gesamtheit $\{z^k(G)\}$, wobei G die Umgebungen von A durchläuft, $z^k(G)$ ein stetiger Zyklus in G ist und, falls H und G Umgebungen von A sind, aus $H \subset G$ folgt: $z^k(H) \sim z^k(G)$ in G . Wenn A eine Teilmenge des Polyeders K ist, so sind die Homologiegruppen der geometrischen Čech-Zyklen mit denjenigen isomorph, die von den inneren Überdeckungen (oder Umgebungsüberdeckungen) von A herrühren. Ein Čech-Zyklus in einer kompakten Teilmenge von A berandet in A dann und nur dann, wenn er in einer kompakten Teilmenge jeder Umgebung von A berandet. — 5. Nach der Einführung der Verschlingungszahlen für Čech-Zyklen wird der Alexandersche Dualitätssatz für beliebige Teilmengen der n -Sphäre S_n in verschiedenen Richtungen verallgemeinert. Es gelten dann Sätze der folgenden Art: a) Notwendig und hinreichend dafür, daß eine beliebige Teilmenge A der S_n h kompakte Čech- k -Zyklen (vgl. Nr. 2) enthält, die in A homolog unabhängig sind, ist, daß $S_n - A$ h kompakte Čech- $n - k - 1$ -Zyklen, die in $S_n - A$ homolog unabhängig sind, besitzt. b) Wenn die Teilmenge A der S_n

einen Čech- k -Zyklus enthält, welcher nicht berandet, so enthält $S_n - A$ einen kompakten Čech- $n - k - 1$ -Zyklus, der in keiner kompakten Teilmenge von $S_n - A$ berandet. Offen gelassen wird die Frage, ob es in separablen metrischen Räumen Čech-Zyklen gibt, die nicht homolog kompakten Čech-Zyklen sind. Die eingeführten Begriffe gestatten es, die (Menger-Urysohnsche) Dimension einer Teilmenge A der S_n aus Homologieeigenschaften der Komplementärmenge $S_n - A$ zu bestimmen. Wenn die Teilmenge A der S_n eine Dimension $\leq k$ besitzt, so beranden alle kompakten Čech- $n - k - 2$ -Zyklen in kompakten Teilmengen von $S_n - A$. Für jede kompakte Teilmenge F_0 von $S_n - A$ gibt es eine kompakte Teilmenge F mit $F_0 \subset F \subset S_n - A$, derart, daß alle Čech- $n - k - 2$ -Zyklen von F_0 in F beranden. — 6. Wenn A eine beliebige Teilmenge der S_n ist, so können die $n - 1$ -dimensionalen Homologieeigenschaften von A durch die Untersuchung von endlichen Überdeckungen von A bestimmt werden. Es gilt nämlich der Satz: A sei eine beliebige Teilmenge der S_n und C^{n-1} ein Čech- $n - 1$ -Zyklus von A . Wenn $C^{n-1} \sim 0$ in allen endlichen Überdeckungen von A ist, so gilt auch $C^{n-1} \sim 0$ in allen Überdeckungen von A . Ähnliche Sätze gelten für kompakte Čech-Zyklen. *Thimm.*

Eilenberg, Samuel: Homology of spaces with operators. I. Trans. Amer. math. Soc. 61, 378—417 (1947).

Für ein zusammenhängendes, in den Dimensionen $2, 3, \dots, q - 1$ asphärisches Polyeder X bestimmt die Fundamentalgruppe $\pi_1(X)$ von X bekanntlich in rein algebraischer Weise die Homologie- und Kohomologiegruppen von X bis zur Dimension $q - 1$ sowie eine Faktorgruppe der q -ten Homologiegruppe und eine Untergruppe der q -ten Kohomologiegruppe [vgl. Eilenberg-MacLane, Ann. Math., Princeton, II. S. 46, 480—509 (1945); Hopf, Comment. math. Helvetici 17, 39—79 (1945); Eckmann, Comment. math. Helvetici 18, 232—282 (1945/46)]. Hopf und Eckmann operieren dabei mit der universellen Überlagerung \tilde{X} von X , Eilenberg-MacLane dagegen zunächst nur in X selbst. Geht man jedoch zu \tilde{X} und zu den Überlagerungsabbildungen (zu singulären Simplexen von X) über, so wird das Verfahren von Eilenberg-MacLane im wesentlichen mit dem von Eckmann identisch. Dabei treten die Homologiegruppen von X auf als diejenigen Gruppen von \tilde{X} , die mittels der Ketten von \tilde{X} mod den Ketten $w\sigma - \sigma[w \in \pi_1(X), \sigma = \text{Zelle von } X]$ definiert werden. Ebenso sind die Kohomologiegruppen von X gleich den Gruppen von \tilde{X} , die mittels der „invarianten“ Koketten f [d. h. $f(w\sigma) = f(\sigma)]$ definiert werden. Ferner wird die Asphärizität von X ersetzt durch die äquivalente Bedingung der Azyklizität von \tilde{X} . Auf diese Weise wird der obengenannte Satz zum Spezialfall eines reinen Homologiesatzes für azyklische Komplexe mit fixpunktfreien Automorphismen. — Verf. betrachtet nun den allgemeineren Fall, daß der Homologietheorie eines Komplexes K mit Automorphismengruppe W eine Koeffizientengruppe G zugrunde gelegt wird, auf die W ebenfalls als Gruppe von (Rechts-)Operatoren wirkt. Er definiert dann in Verallgemeinerung zu oben „äquivalente“ und „residuale“ Homologiegruppen. Eine Kette von K heißt residual, wenn sie Summe von Ketten der Form $g(w\sigma) - (gw)\sigma$ ($g \in G, w \in W, \sigma = \text{Zelle von } K$) ist. Der Rand einer residualen Kette ist residual. Daher erhält man aus ihnen nach bekanntem Schema die residualen Homologiegruppen $H_r^n(K, G)$. Rechnet man dagegen mod residualen Ketten, so erhält man die äquivarianten Homologiegruppen $H_e^n(K, G)$. Entsprechend heißt (für Linksooperatoren $w \in W$) eine Kokette f von K mit Funktionswerten in G äquivariant, wenn $f(w\sigma) = wf(\sigma)$ für alle $w \in W$ und alle σ gilt. Der Korand einer äquivarianten Kokette ist äquivariant, und man erhält daher aus den äquivarianten Koketten die äquivarianten Kohomologiegruppen $H_e^n(K, G)$. Rechnet man mod äquivarianten Koketten, so erhält man die residualen Kohomologiegruppen $H_r^n(K, G)$. Zwischen diesen Homologie- und Kohomologiegruppen gelten die gewöhnlichen Dualitätssätze. — Diese Begriffsbildungen lassen sich übertragen auf einen topologischen Raum X mit einer Gruppe W von Homöomorphismen auf sich, indem man alles auf den singulären Komplex von X bezieht, der W als Automorphismengruppe besitzt. Ist insbesondere X ein Polyeder und W eine Gruppe simplizialer Selbstabbildungen, so kann man die Gruppen

von X aus der Simplicialzerlegung von X berechnen. — Wieder gilt der Hauptsatz: Sei X ein stetig-zusammenhängender, in den Dimensionen $1, 2, \dots, q-1$ azyklischer Raum. Sei W eine Gruppe fixpunktfreier Homöomorphismen von X auf sich und gleichzeitig Gruppe von rechten (linken) Operatoren für die Koeffizientengruppe G . Dann bestimmt W die Gruppen $H_i^e(X, G)$, $H_i^r(X, G)$ [$H_i^e(X, G)$, $H_i^r(X, G)$] für $i = 1, 2, \dots, q-1$ sowie eine gewisse Faktorgruppe von $H_q^e(X, G)$ [eine gewisse Untergruppe von $H_q^e(X, G)$]. Und zwar sind die Gruppen $H_i^e(X, G)$ die von Verf. und MacLane (dies. Zbl. 29, 340) definierten Kohomologiegruppen $H^i(W, G)$ der Gruppe W . — Ist insbesondere $X = \tilde{X}_0$ die universelle Überlagerung eines topologischen Raumes X_0 und W die Deckbewegungsgruppe von \tilde{X}_0 , so sind die Gruppen $H_n^e(\tilde{X}_0, G)$ und $H_n^r(\tilde{X}_0, G)$ identisch mit Homologie- und Kohomologiegruppen von X_0 über geeigneten lokalen Koeffizientengruppen im Sinne von Steenrod [Ann. Math., Princeton, II. S. 44, 610—627 (1943)]. Diese letzteren sind übrigens (für ein Polyeder X_0) mit den Reidemeisterschen Homologiegruppen der Überdeckungen von X_0 [J. reine angew. Math. 173, 164—173 (1935); dies. Zbl. 12, 126] äquivalent. Der Hauptsatz liefert also eine Verallgemeinerung des zu Anfang erwähnten Satzes auf lokale Koeffizienten.

Burger (Frankfurt a. M.).

Eilenberg, Samuel and Saunders MacLane: Homology of spaces with operators. II. Trans. Amer. math. Soc. 65, 49—99 (1949).

Seien K_1 und K_2 zwei in den Dimensionen $< q$ azyklische Komplexe mit der Gruppe W von fixpunktfreien Automorphismen. Dann sieht man durch Induktion nach der Dimension leicht, daß es eine „äquivariante Kettentransformation“ α des q -dimensionalen Gerüsts K_1^q in K_2^q gibt [d. h. W -treue, randtreue Homomorphismen α_i der Kettengruppen $C_i(K_1)$ in $C_i(K_2)$ für $i \leq q$, wobei α_0 Ecken auf Ecken abbildet] und daß irgend zwei solche Kettentransformationen α und β in den Dimensionen $\leq q-1$ „kettenhomotop“ sind (d. h. es gibt für $i \leq q-1$ W -treue Homomorphismen $D_i: C_i(K_1) \rightarrow C_{i+1}(K_2)$ mit $\partial D_i = \beta_i - \alpha_i - D_{i-1} \partial$ [∂ = Randoperator]). Bezeichne η den natürlichen Homomorphismus der Zyklengruppen Z_q auf die Homologiegruppen H_q . Dann ist die „Obstruktion“ f_{α}^{q+1} von α als die äquivariante Kokette von K_1 erklärt, die jedem Simplex σ^{q+1} von K_1 den Funktionswert $\eta \alpha_{\sigma} \partial \sigma^{q+1} \in H_q(K_2)$ zuordnet. Ihre äquivariante Kohomologieklassse $\{f_{\alpha}^{q+1}\} \in H_q^{q+1}(K_1, H_q(K_2))$ (für die Bezeichnungen vgl. vorsteh. Referat) ist unabhängig von der speziellen Wahl von α und dann und nur dann gleich Null, wenn eine äquivariante Kettentransformation von K_1^{q+1} in K_2^{q+1} existiert [vgl. hierzu auch Eilenberg, Ann. Math., Princeton, II. S. 41, 231—251 (1940); dies. Zbl. 22, 407]. Wählt man als K_1 für jede feste Gruppe W einen in allen Dimensionen azyklischen Standardkomplex K_W mit der fixpunktfreien Automorphismengruppe W , so erhält man für jeden Komplex K_2 eine charakteristische Kohomologieklassse $l_{K_2}^{q+1} \in H_q^{q+1}(K_W, H_q(K_2))$. Die Gruppen $H_e^n(K_W, G)$ des Standardkomplexes K_W sind übrigens nach Eilenberg (vgl. vorsteh. Referat) die Gruppen $H^n(W, G)$ der Gruppe W . Es gilt nun der grundlegende Satz: Sind K_1 und K_2 Komplexe wie oben und ferner $H_q(K_1) = H_q(K_2)$ und $l_{K_1}^{q+1} = l_{K_2}^{q+1}$, dann sind K_1 und K_2 vom selben „Kettenhomotopietyp“ in den Dimensionen $\leq q$ (d. h. es existieren äquivariante Kettentransformationen $\lambda: K_1^{q+1} \rightarrow K_2^{q+1}$ und $\lambda': K_2^{q+1} \rightarrow K_1^{q+1}$, so daß $\lambda \lambda'$ und $\lambda' \lambda$ in den Dimensionen $\leq q$ zur Identität kettenhomotop sind). Insbesondere ist also $H_q^e(K_1, G) = H_q^e(K_2, G)$. Es wird eine explizite algebraische Konstruktionsvorschrift für $H_q^e(K, G)$ aus W , $H_q(K)$, G , der Operationsweise von W auf $H_q(K)$ und G und der charakteristischen Kohomologieklassse l_K^{q+1} angegeben. — Die Begriffsbildungen lassen sich übertragen auf einen topologischen Raum X mit einer Gruppe W von fixpunktfreien Homöomorphismen auf sich, indem man alles auf den singulären Komplex von X bezieht. Insbesondere ist für ein Polyeder X

mit einer Gruppe W fixpunktfreier simplizialer Selbstabbildungen die charakteristische Kohomologiekategorie l_X^{q+1} gleich der charakteristischen Kohomologiekategorie einer Simplizialzerlegung von X . — Ist insbesondere $X = \tilde{X}_0$ die universelle Überlagerung eines topologischen Raumes X_0 und W die Deckbewegungsgruppe von \tilde{X}_0 und operiert W trivial auf die Koeffizientengruppe G , so folgt: Ist X_0 stetig-zusammenhängend und asphärisch in den Dimensionen $2, 3, \dots, q-1$, so ist die Kohomologieguppe $H^q(X_0, G)$ durch die Homotopiegruppen $\pi_1(X_0)$, $\pi_q(X_0)$, die Operationsweise von π_1 auf π_q , die Koeffizientengruppe G und die charakteristische Kohomologiekategorie $l_{\tilde{X}_0}^{q+1} \in H^{q+1}(\pi_1, \pi_q)$ bestimmt. Bei anderer Operationsweise von W auf G erhält man einen entsprechenden Satz für die q -te Kohomologieguppe von X_0 mit lokalen Koeffizienten. Durch Übergang zu den Homologiegruppen gelingt ferner die Bestimmung des Bildes und des Kernes für den natürlichen Homomorphismus von $\pi_q(X_0)$ in $H_q(X_0)$. — Als Beispiel werden die Invarianten $l_{S^{2n+1}}^{2n+2}$ für die Linsenräume L^{2n+1} berechnet.

Burger (Frankfurt a. M.).

Gordon, I. I.: Klassifikation der Abbildungen eines Komplexes in den projektiven Raum. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 65, 441—444 (1949) [Russisch].

Es werden die Abbildungsklassen eines n -dimensionalen Komplexes K^n in den n -dimensionalen reellen projektiven Raum P^n untersucht. Sei $\Phi_0(f)$ die Untergruppe der Fundamentalgruppe Φ von K^n , die durch die Abbildung f von K^n in P^n annulliert wird. Für die Abbildungen mit $\Phi_0(f) = \Phi$ fällt das Klassifikationsproblem mit dem der Abbildungen von K^n in S^n (= universelle Überlagerung von P^n) zusammen. Sei daher weiterhin $\Phi_0(f) \neq \Phi$. Satz 1: Zwei Abbildungen f, g sind dann und nur dann auf dem $(n-1)$ -dimensionalen Gerüst K^{n-1} von K^n homotop, wenn $\Phi_0(f) = \Phi_0(g)$ ist. Es bleiben daher weiterhin nur noch solche Abbildungen zu untersuchen, die auf K^{n-1} übereinstimmen, also zu einer festen Untergruppe $\Phi_0 \subset \Phi$ gehören. Für diese gilt Satz 2: Für ungerades n entsprechen ihre Klassen umkehrbar eindeutig den Elementen der n -ten (ganzzahligen) Kohomologieguppe von K^n . Für gerades n ist das Ergebnis komplizierter. — Für den Fall einer Mannigfaltigkeit K^n gilt Satz 5: Die Abbildungsklassen von K^n in P^n , die zur selben Untergruppe $\Phi_0 \neq \Phi$ gehören, stehen für ungerades n und orientierbares K^n in eineindeutiger Beziehung zum Abbildungsgrad, für ungerades n und nichtorientierbares K^n gibt es zwei Klassen. Für gerades n und orientierbares K^n gibt es zwei Klassen, für gerades n und nichtorientierbares K^n , für das aber die zu Φ_0 gehörige zweiblättrige Überlagerung L^n von K^n orientierbar ist, stehen die Abbildungsklassen in eineindeutiger Beziehung zum absoluten Betrag des Grades der Überlagerungsabbildung von L^n in S^n . Im Falle n gerade, K^n und L^n nichtorientierbar, gibt es höchstens zwei Klassen. — Beweise werden nicht ausgeführt. Jedoch ist ersichtlich, daß die Überlagerung L^n eine wesentliche Rolle spielt.

Burger (Frankfurt a. M.).

Youngs, J. W. T.: The extension of a homeomorphism defined on the boundary of a 2-manifold. Bull. Amer. math. Soc. 54, 805—808 (1948).

M, \mathfrak{M} seien homöomorphe (kompakte und berandete) Flächen mit den Rändern $B = J_1 \cup \dots \cup J_n$ bzw. $\mathfrak{B} = \mathfrak{J}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{J}_n$ (J_i, \mathfrak{J}_i sind Jordansche Kurven). Bezeichne $h: B \rightarrow \mathfrak{B}$ eine Homöomorphie zwischen den Rändern. 1) M, \mathfrak{M} seien orientierbar angenommen. Es gibt dann und nur dann eine topologische Erweiterung $h^*: M \rightarrow \mathfrak{M}$ von h , wenn h zusammengehörige Orientierungen von J_1, \dots, J_n in zusammengehörigen Orientierungen von $\mathfrak{J}_1, \dots, \mathfrak{J}_n$ transformiert. 2) Wenn M, \mathfrak{M} nicht orientierbar sind, läßt sich jede Homöomorphie h zwischen den Rändern in eine Homöomorphie zwischen den Flächen erweitern. (Zusammenfassend: die natürlichen notwendigen Bedingungen sind hinreichend.)

Fáry (Paris).

Kagno, I. N.: Desargues' and Pappus' graphs and their groups. Amer. J. Math. 69, 859—862 (1947).

Verf. beweist, daß der Desarguessche Graph Δ und der Pappussche Graph Π nicht in eine projektive Ebene eingebettet werden können. Dabei ist Δ bzw. Π der komplementäre Graph des Petersenschen regulären Graphen dritten Grades mit 10 Knotenpunkten bzw. des regulären Graphen zweiten Grades mit 9 Knotenpunkten, der aus drei knotenpunktfremden Dreiecken besteht. Aus einem Resultat von R. Frucht [Comment. Math. Helvetici 9, 217—223 (1937); dies. Zbl. 16, 376] folgt, daß die Gruppe des Graphen Δ isomorph zur symmetrischen Gruppe 5-ten Grades ist. Endlich zeigt Verf., daß die Gruppe des Graphen Π direktes Produkt von vier Gruppen ist, deren jede isomorph zur symmetrischen Gruppe 3-ten Grades ist.

T. Szele (Debrecen).

Klassische theoretische Physik.

Hydrodynamik:

- Moreau, Jean-Jacques: Sur deux théorèmes généraux de la dynamique d'un milieu incompressible illimité. C. r. Acad. Sci., Paris 226, 1420—1422 (1948).
 Moreau, Jean-Jacques: Sur la dynamique d'un écoulement rotationnel. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 100—102 (1949).

Bei einem unter den üblichen Voraussetzungen der Hydrodynamik betrachteten Medium verlieren die Kraft und Moment darstellenden Integrale ihren Sinn, wenn Erstreckung ins Unendliche angenommen wird. Verf. zeigt, wie man durch Elimination der im inkompressiblen Fall nicht in Erscheinung tretenden Potentialkräfte und des Druckes auch hier unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen zu entsprechenden Darstellungen kommen kann. Im Fall eines dreidimensionalen inkompressiblen Mediums bildet er dazu mittels des Wirbelvektors $\vec{\omega}$ die Integrale

$$\vec{I} = \iiint O \vec{M} \wedge \vec{\omega} \, d\tau \quad \text{bzw.} \quad \vec{J} = - \iiint O \vec{M}^2 \vec{\omega} \, d\tau,$$

in denen O ein fester Bezugs- und M der Integrationspunkt ist. Bezeichnen dann \vec{R} bzw. \vec{H} Kraft bzw. Moment bez. O der äußeren nicht aus einem Potential herleitbaren auf das Medium

wirkenden Kräfte und ρ dessen Dichte, so gilt $\rho \frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{R}$ bzw. $\rho \frac{d\vec{J}}{dt} = \vec{H}$. Vorausgesetzt wird

dabei, daß ru , $r^3\omega$, $r^2 T_{ik}$ bzw. $r^3 u^2$, $r^4\omega$, $r^3 T_{ik}$ mit $r \rightarrow \infty$ gegen Null streben, wenn u bzw. ω Größe des Geschwindigkeits- bzw. Wirbelvektors und T_{ik} den Tensor der inneren Kräfte bedeuten. Diese Aussagen bleiben auch dann noch gültig, wenn das Medium in mehrere Stücke zerfällt, falls nur die Komponenten der Geschwindigkeit, nicht jedoch notwendig deren Ableitungen beim Durchgang durch die Begrenzungsflächen sich stetig verhalten. Den Fall auftretender Gleitflächen kann man durch Ersetzen dieser Unstetigkeiten mittels geeigneter Wirbelbelegungen behandeln, desgleichen dürfen Wirbellinien auftreten. So ergibt sich bei bekanntem Bewegungszustand für Kraft und Moment eine Darstellung als Funktion der Wirbel, aus der die bekannten klassischen Aussagen für vollkommene Flüssigkeiten abgeleitet werden können. Entsprechende Entwicklungen gelten im zweidimensionalen Fall. — Die damit sichtbar gewordene Bedeutung

der Integrale \vec{I} und \vec{J} veranlaßt Verf., in einer zweiten Note nach derselben Methode den Fall eines endlich ausgedehnten kompressiblen Mediums zu behandeln, das in einer Umgebung seiner Begrenzung S als Helmholtzisch vorausgesetzt wird, d. h. sich hier wie eine vollkommene Flüssigkeit verhält und die Ableitung der Abstandswirkungen aus einem Potential gestattet; auf diesen Fall läßt sich z. B. das Problem eines in eine vollkommene Flüssigkeit eingetauchten festen Körpers zurückführen. Wieder ergeben sich entsprechende Darstellungen für \vec{R}/ρ und \vec{H}/ρ . Wird von $\vec{\omega}$ angenommen, daß es auf der Begrenzung S der Null- oder der Tangentialvektor ist, so läßt sich das Geschwindigkeitsfeld \vec{u} darstellen als Summe eines nach dem Biot-Savartschen Gesetz durch die innere Wirbelstruktur erzeugten Feldes \vec{u}^i und desjenigen einer erzeugenden Geschwindigkeit \vec{v} . Die dann für \vec{R} und \vec{H} sich ergebenden Ausdrücke stellen eine Ausdehnung des klassischen Satzes von Joukowski dar. Auch hier ist wieder eine Erweiterung auf den mit Singularitäten behafteten Fall möglich.

Grell (Berlin).

Sears, W. R.: A new treatment of the lifting-line wing theory, with applications to rigid and elastic wings. Quart. appl. Math. 6, 239—255 (1948).

Die Theorie der tragenden Linie wird nach Trefftz in eine Randwertaufgabe dritter Art, und sodann vermöge konformer Abbildung des Äußeren der tragenden

Linie auf das Äußere des Einheitskreises mit Hilfe des Poissonschen Integrals in eine Integralgleichung zweiter Art mit logarithmisch-singulärem symmetrischem Kern umgeformt, der im übrigen positiv definit ist. Man kann dann die Auflösungsformel von E. Schmidt anwenden. Für die ebene, trapezförmige Tragfläche werden die Eigenwerte und Eigenfunktionen tabelliert angegeben. Ferner wird auf derselben Grundlage das Problem einer elastischen Fläche behandelt, die sich unter dem Einfluß der Luftkräfte deformiert. *Schmeidler (Berlin).*

Reissner, Eric: Boundary value problems in areodynamics of lifting surfaces in non-uniform motion. Bull. Amer. math. Soc. **55**, 825—850 (1949).

Die allgemeine Aufgabe der Tragflügeltheorie im dreidimensionalen Raum bei ungleichmäßiger Bewegung der Fläche wird unter der Voraussetzung einer undurchdringlichen, beliebig deformierbaren Fläche und einer inkompressiblen oder kompressiblen, aber nicht zähen Flüssigkeit als Grenzwertproblem partieller Differentialgleichungen in verschiedenen Stufen formuliert. 1. Das allgemeine Problem wird in bekannter Weise ausgesprochen, wobei ein Teil der Grenzbedingungen an der hinter der Tragfläche in der Flüssigkeit entstehenden Unstetigkeitsfläche gilt, deren Lage und Bewegung selbst noch unbekannt ist. 2. Der Hauptteil der Arbeit ist der linearisierten Theorie gewidmet, bei der in üblicher Weise Größen 2. Ordnung in den Zusatzgeschwindigkeiten und -Drucken vernachlässigt werden. Hier gelingt die von der induzierten Geschwindigkeitsverteilung unabhängige Festlegung der Unstetigkeitsfläche, die von der Hinterkante der Tragfläche ausgeht. Das Problem der Geschwindigkeitsverteilung wird dann mit Hilfe des Geschwindigkeitspotentials φ formuliert. — 3. Der Sonderfall einer nahezu ebenen Fläche in inkompressibler Strömung wird besonders hervorgehoben, und eine Integralgleichung für $\partial\varphi/\partial x$ abgeleitet, die einfacher ist, als man sie mit Hilfe der Prandtlschen Methode des Beschleunigungspotentials erhält. Als Spezialfall wird die ebene Bewegung im Falle harmonischer Schwingungen behandelt, im Anschluß daran die nichtoszillatorische ebene Bewegung. — Der Bericht — denn es handelt sich in der ganzen Arbeit weniger um Einzelentwicklungen von beweisendem Charakter, als um eine Darstellung der Grundgedanken unter Hinweis auf die Literatur — schließt mit Andeutungen über eine Näherungstheorie der oszillatorischen Bewegung bei endlicher Spannweite. Hier darf der Ref. auf seine Arbeit zur Theorie des Schwingenfluges II, S.-B. Berliner Math. Ges. **40/41**, 1—12 (1941); dies. Zbl. **27**, 357 hinweisen.

Schmeidler (Berlin).

Volkoff, G. M. and D. S. Carter: On the shearing stress in a viscous fluid across a surface normal to the lines of flow. Amer. J. Physics **17**, 37—40 (1949).

Nach Meinung der Verff. bestehen gewisse Auffassungsschwierigkeiten darin, daß einerseits die Schubspannungen in einer zähen Strömung ein relatives Gleiten zweier benachbarter Schichten voraussetzen, andererseits aber der Schubspannungstensor symmetrisch ist. Ausgehend von einer unsymmetrischen Winkelverteilung der molekularen Geschwindigkeiten in einem Gas wird daher der Beweis für die Symmetrie des Spannungstensors geführt und das Auftreten von Schubspannungen auch normal zur Richtung der Stromlinien nachgewiesen. *Wuest (Göttingen).*

Obuchov, A. M.: Die Pulsation des Druckes in turbulenter Strömung. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. **66**, 17—20 (1949) [Russisch].

M. Millionchtschikov [Izvestija Akad. Nauk SSSR **1941**, 433—446] a affirmé que la pulsation de la pression (dans un courant à turbulence isotrope d'une fluide incompressible) est nulle. L'A. critique cette conclusion; son analyse le conduit au résultat suivant. Posons $r = |\vec{M}_1 \vec{M}_2|$ et: $\pi(r) = [\overline{p(M_2)} - \overline{p(M_1)}]^2$. — Des hypothèses supplémentaires permettent d'exprimer $\Delta^2\pi(r)$ (Δ étant l'opérateur de Laplace) au moyen des fonctions de structure du champ des vitesses. En utilisant les travaux récents de M. Kolmogorov et les siens propres, l'A. parvient à résoudre:

en $\pi(r)$ l'équation précédente. Il trouve: $\pi(r) = \varrho^2 [D_{ll}(r)]^2$ où: ϱ est la densité du liquide; $D_{ll}(r)$ est la composante longitudinale de la fonction de structure du champ des vitesses.

J. Kravtchenko (Grenoble).

Oswatitsch, Klaus: Fortschritte der Gasdynamik. Acta physica Austriaca 3, 1—21 (1949).

Kurzer Bericht ohne Literaturangaben.

Young, A. D.: Note on the velocity and temperature distributions attained with suction on a flat plate of infinite extent in compressible flow. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 1, 70—75 (1948).

Verf. behandelt das Thermometerproblem für die laminare kompressible Grenzschicht mit Absaugung an der ebenen Platte. Die Prandtl'sche Zahl und die spezifischen Wärmen werden als Konstante betrachtet. Der Verf. betrachtet die Grenzschichtströmung in großer Entfernung vom Plattenanfang, wo die Zustandsgrößen nur von der Entfernung von der Platte abhängen. Die Absaugung wird durch eine Komponente der Geschwindigkeit am Rande der Grenzschicht erfaßt. Die partiellen Differentialgleichungen der Grenzschicht gehen in gewöhnliche über, die sich — wie bei der ebenen Platte ohne Absaugung — durch Einführung der Geschwindigkeitskomponente parallel zur Platte als unabhängige Variable mittels der Funktionen der inkompressiblen Grenzschicht integrieren lassen. Besonders einfach wird der Fall der Grenzschichtströmungen bei sehr tiefen Temperaturen. Geschwindigkeits- und Temperaturverteilungen für verschiedene Mach'sche Zahlen beschließen die Arbeit.

Wendt (Bonn).

Illingworth, C. R.: Steady flow in the laminar boundary layer of a gas. Proc. R. Soc., London, A 199, 533—558 (1949).

Wenn man die Grenzschichtgleichungen für kompressible Strömungen mit Hilfe der Prandtl-Mises'schen Transformation auf die Stromfunktionskoordinate umformt, wie es V. Kármán und Tsien (1938) bereits für die Grenzschichtströmung längs einer ebenen Wand und für die Prandtl'sche Zahl $\sigma = 1$ getan haben, wird die Berechnung sehr vereinfacht, indem auch bereits bekannte Lösungen der inkompressiblen Grenzschichten nutzbar gemacht werden können. In der vorliegenden Arbeit wird diese Methode bei der ebenen Platte für eine beliebige Prandtl'sche Zahl und eine beliebige Abhängigkeit der Zähigkeit von der Temperatur behandelt, ein Problem, das von Crocco (1946) schon auf andere Weise untersucht wurde. Weiterhin wird die Grenzschichtströmung in der Umgebung des Staupunktes eines Zylinders unter Vernachlässigung der Dissipation und der Schwere berechnet. Für $\sigma = 0,725$ und unter Annahme der Sutherland'schen Näherungsformel für die Abhängigkeit der Zähigkeit von der Temperatur wird ein Zahlenbeispiel berechnet. Verf. zeigt ferner, daß für $\sigma = 1$ und $\mu \sim T$ und bei Annahme einer wärmeisolierten Wand die kompressiblen Grenzschichtgleichungen bei beliebig vorgegebener Außenströmung auf die Grenzschichtgleichungen einer entsprechenden inkompressiblen Strömung mit einer gewissen, bestimmten Außenströmung zurückgeführt werden können, so daß unter den genannten Einschränkungen auch die kompressible Grenzschichtströmung an einem Kreiszylinder außerhalb des Staupunktbereiches berechnet werden kann. Wegen der Dichteunterschiede in der Grenzschicht und in der Außenströmung bewirkt die Schwere eine Sekundärströmung. Verf. untersucht den Einfluß der Schwere in allgemeiner Form und gibt eine Abschätzung an, wann dieser Einfluß in der Rechnung vernachlässigt werden kann. Für die Grenzschichtströmung längs einer ebenen Wand mit senkrechter Vorderkante und für die Strömung in der Umgebung des Staupunktes eines senkrecht stehenden Zylinders wird die durch die Schwere bewirkte Sekundärströmung (Querdrift) berechnet und im ersten Fall ein Zahlenbeispiel gegeben. Auch die Grenzschichtströmung in der Umgebung des Staupunktes eines Zylinders mit waagerechter Achse, der in senkrechter Richtung angeströmt wird, kann unter Berücksichtigung des Schwereinflusses berechnet werden. Ein weiterer Abschnitt behandelt die freie Konvektionsströmung an einer ebenen Platte, wobei allerdings die Dissipationswärme vernachlässigt wird und der Zustand des ruhenden Gases außerhalb der Grenzschicht als unabhängig von der Höhe angenommen wird. Abschließend wird noch die ebene laminare Strömung im Nachlauf und im Strahl behandelt. Für das Strahlproblem können keine einfachen Lösungen gefunden werden ohne die schon von Howarth benutzten Einschränkungen $\sigma = 1$, $\mu \sim T$, dagegen sind diese Einschränkungen für das Nachlaufproblem nicht erforderlich.

Wuest (Göttingen).

Lofejanskij, L. G.: Der Widerstand eines Profilgitters in einer Gasströmung mit vorkritischen Geschwindigkeiten. Priklad. Mat. Mech., Moskva 13, 171—186 (1949) [Russisch].

L'A. envisage un écoulement plan permanent, d'un gaz (compressible) visqueux, à travers une persienne P , formée de profils quelconques. On suppose que la vitesse de l'écoulement le long des profils est inférieure à la vitesse locale du son. — Etant donné un élément de P , l'A. définit d'abord le vecteur résistance \vec{R}' de ce profil comme différence entre la résistance totale et la force de Joukowski (notion introduite par l'A.). — L'A. se propose la détermination de \vec{R}' . Le raisonnement classique est ici en défaut puisque les sillages à l'aval de P , créés par les éléments de P , se rejoignent à l'aval de P ; le régime à l'infini à l'aval n'est, des lors, plus irrotationnel. Pour tourner cette difficulté, l'A. introduit diverses hypothèses simplificatrices dont voici la plus importante (déjà utilisée avec succès par l'A. dans son mémoire sur la résistance d'une persienne placée dans un courant de fluide visqueux incompressible): les points d'intersection des sillages créés par les éléments de P sont situées sur une droite Δ parallèle à P ; Δ est à distance finie; au delà de Δ , le champ des vitesses diffère assez peu d'un champ uniforme pour qu'on puisse négliger les quantités telles que $(V - V_\infty)^2$. Ceci fait, l'A. obtient une expression simple de \vec{R}' .

J. Kravtchenko (Grenoble).

Lojejanskij, L. G.: Über eine Verallgemeinerung der Žukovskijschen Formel auf den Fall eines Profils in einem Gitter, das von einem kompressiblen Gas mit Unterschallgeschwindigkeiten umströmt wird. Priklad. Mat. Mech., Moskva 13, 209—216 (1949) [Russisch].

MM. Keldysch et Frankl [Bull. Acad. Sci. URSS, VII. S. 4, 561—601 (1934); ce Zbl. 11, 71] ont étendu la formule classique de Joukowski: $R = \rho V \Gamma$ au cas d'un profil unique, placé dans un fluide compressible. L'A. généralise d'une manière approchée ce résultat au cas du profil appartenant à une persienne rectiligne, placée dans un courant de fluide compressible, parfait. Cette extension suppose 1) que la valeur de ρ est à remplacer par la moyenne des valeurs de la densité à l'infini, en amont et en aval 2) que les vitesses sont petites par rapport à celle du son 3) que la définition de V soit modifiée d'une manière convenable. Enfin, l'A. évalue l'ordre de grandeur de l'erreur commise lorsqu'on calcule la portance au moyen de sa formule.

J. Kravtchenko (Grenoble).

Biot, M. A.: Transonic drag of an accelerated body. Quart. appl. Math. 7, 101—105 (1949).

Für einen mit konstanter Beschleunigung bewegten, symmetrisch zur Bewegungsrichtung liegenden dünnen Keil wird in der akustischen Näherung der Widerstand beim Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit berechnet. Das Verfahren läßt sich auf dünne symmetrische Profile bei konstanter Beschleunigung erweitern.

Wendt (Bonn).

Cabannes, Henri: Étude des écoulements gazeux au voisinage de la vitesse du son. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 102—104 (1949).

Konstruktion von Gasströmungen in der Nachbarschaft der Schallgeschwindigkeit bei Verwendung eines speziellen in der Arbeit angegebenen Adiabatengesetzes.

Wendt (Bonn).

Goldstein, S., M. J. Lighthill and J. W. Craggs: On the hodograph transformation for high-speed flow. I. A flow without circulation. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 1, 344—357 (1948).

Verff. behandeln kompressible, zirkulationsfreie, ebene Strömungen, die sich aus der zirkulationsfreien Strömung um den Kreiszylinder im inkompressiblen Falle berechnen lassen. Es wird der Zusammenhang mit den früher von Lighthill (dies. Zbl. 29, 177) behandelten allgemeinen Methode hergestellt. Den Schluß bilden Bemerkungen zur Verallgemeinerung der vorgetragenen Methode. *Wendt.*

Lighthill, M. J.: On the hodograph transformation for high-speed flow. II. A flow with circulation. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 1, 442—450 (1948).

Aus der inkompressiblen, zirkulationsbehafteten Strömung um den Kreiszylinder wird auf Grund der Hodographenmethode eine kompressible Strömung gewonnen (vgl. vorsteh. Referat und dies. Zbl. 29, 177). *Wendt (Bonn).*

Robinson, A.: On source and vortex distributions in the linearized theory of steady supersonic flow. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 1, 408—432 (1948).

Anwendung der Methode von Hadamard zur Lösung des Anfangswertproblems hyperbolischer Differentialgleichungen auf die linearisierte Gleichung der Überschallströmungen. *Wendt (Bonn).*

Lighthill, M. J.: Supersonic flow past slender pointed bodies of revolution at yaw. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 1, 76—89 (1948).

Es wird die Potentialströmung für dünne Rotationskörper der Dicke t mit willkürlicher analytischer Meridiankurve bei Überschall betrachtet, deren Achse den Winkel ψ gegen die Parallelströmung bildet. Setzt man das Potential als Potenzreihe in ψ an, so gewinnt man lineare Differentialgleichungen für die einzelnen Koeffizienten der Potenzen von ψ , die sukzessive gelöst werden können. Verf. berechnet Auftriebs- und Widerstandskoeffizient bis einschließlich der Glieder in ψ^3 , $\psi^2 t$ und $\psi t^2 \ln t$ bzw. t^2 , $t^2 \ln t$, ψ^2 . Den Schluß der Arbeit bildet eine Bemerkung, daß diese Ergebnisse beim Auftreten eines Verdichtungsstoßes gültig bleiben. *Wendt (Bonn).*

Lighthill, M. J.: Supersonic flow past slender bodies of revolution the slope of whose meridian section is discontinuous. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 1, 90—102 (1948).

Die in der vorangegangenen Arbeit (s. vorsteh. Referat) entwickelte Näherungstheorie wird auf Überschallströmungen um dünne Rotationskörper erweitert, deren Meridiankurven Unstetigkeiten aufweisen. Es werden Näherungen für Druckverteilung, Auftrieb, Widerstand und Moment angegeben. *Wendt (Bonn).*

Ward, G. N.: Supersonic flow past slender pointed bodies. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 2, 75—97 (1949).

Behandlung der linearisierten Überschallströmung mit Anwendung auf einen Rotationskörper mit Flügeln. *Wendt (Bonn).*

Broderick, J. B.: Supersonic flow round pointed bodies of revolution. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 2, 98—120 (1949).

Die Arbeit behandelt die symmetrische Strömung um dünne Rotationskörper bei Überschall. Das Potential wird als Reihe in t und $\ln t$ (t Dicke des Rotationskörpers) angesetzt. Geht man mit diesem Ansatz in die Differentialgleichung der Gasströmung ein, so ergeben sich lineare Differentialgleichungen für die Koeffizienten. Diese werden als Reihen in r und $\ln r$ angesetzt, deren Koeffizienten nunmehr Funktionen von x sind, die sich durch die Differentialgleichungen und die Randbedingungen ermitteln lassen. Die Druckverteilung am Körper und der Widerstandskoeffizient werden durch Ausdrücke in t^2 , $t^2 \ln t$, t^4 , $t^4 \ln t$ und $t^4 \ln^2 t$ angegeben. Der Einfluß eines Verdichtungsstoßes dürfte sich erst in höheren, hier vernachlässigten Gliedern geltend machen. Im Schlußparagraphen vergleicht Verf. seine Näherung mit drei in Amerika (s. dies. Zbl. 29, 282) durchgerechneten Kegelströmungen. *Wendt (Bonn).*

Broderick, J. B.: Supersonic flow past a semi-infinite cone. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 2, 121—128 (1949).

Das in der vorstehend besprochenen Arbeit entwickelte Verfahren wird auf die Kegelströmung bei Beachtung des Verdichtungsstoßes angewandt. Das Ergebnis für den Winkel und die Stärke des Verdichtungsstoßes stimmen mit denen von

Lighthill (dies. Zbl. 33, 416) überein. Die Druckverteilung am Kegel stimmt mit der in der voranstehenden Arbeit berechneten bis zu den Gliedern in t^4 überein.

Wendt (Bonn).

Roper, Gwendolen M.: The flat delta wing at incidence, at supersonic speeds, when the leading edges lie outside the Mach cone of the vertex. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 1, 327—343 (1948).

Erweiterung der Methode von Steward [The lift of a delta wing at supersonic speeds, Quart. appl. Math. 4, 246—254 (1946)] für die linearisierte Überschallströmung um einen Dreiecksflügel innerhalb des Machschen Kegels an der Spitze auf den im Titel genannten Fall. Der betrachtete Dreiecksflügel wird symmetrisch zur Anströmung liegend vorausgesetzt. Die für die Druckverteilung, den Auftriebskoeffizienten usw. entwickelten Formeln sind in Übereinstimmung mit den von Puckett [Supersonic wave drag of thin airfoils, J. Aeronaut. Sci., New York 13, 475—484 (1946)] und Ward [The pressure distribution of some flat laminar aerofoils at incidence at supersonic speeds, A. R. C. 9918] veröffentlichten Ergebnissen.

Wendt (Bonn).

Roper, Gwendolen M.: The yawed delta wing at incidence at supersonic speeds. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 2, 354—373 (1949).

In einer früheren Arbeit (s. vorsteh. Referat) betrachtete Verf. die Überschallströmung um ein zur Anströmrichtung symmetrisch gelegenes Dreieck. Diese Voraussetzung wird jetzt fallen gelassen. Es werden die folgenden drei Fälle untersucht. — 1. Das tragende Dreieck liegt innerhalb des Machschen Kegels der Spitze. Dieser Fall läßt sich auf das symmetrisch zur Strömung gelegene Dreieck [Steward: The lift of a delta wing at supersonic speeds, Quart. appl. Math. 4, 246—254 (1946)] zurückführen. 2. Vom Dreieck liegt eine Seite innerhalb und eine außerhalb des Machschen Kegels. 3. Das Dreieck durchsetzt den Machschen Kegel, und beide tragenden Linien liegen außerhalb des Kegels. — Es werden Formeln für die Druckverteilung und den Auftrieb angegeben.

Wendt (Bonn).

Ward, G. N.: The approximate external and internal flow past a quasi-cylindrical tube moving at supersonic speeds. Quart. J. Mech. appl. Math., Oxford 1, 225—245 (1948).

Berechnung der linearisierten Überschallströmung um eine nahezu kreiszylinderförmige, wenig angestellte Düse. Für die Außenströmung werden Auftrieb, Widerstand und Moment angegeben. Bei der Behandlung der Strömung im Innern der Düse treten Singularitäten auf, die diskutiert werden.

Wendt (Bonn).

Munk, M. M.: On supersonic flow patterns. J. appl. Physics, Lancaster Pa. 20, 302—305 (1949).

In der Note wird der Tatbestand diskutiert, daß die Machsche Linie für die Machsche Zahl $\sqrt{4/(3-\gamma)}$ (γ Verhältnis der spezifischen Wärmen) die Krümmung Null hat.

Wendt (Bonn).

Frankl, F. J.: Ausströmen eines Überschall-Strahles aus einem Behälter mit ebenen Wänden. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 58, 381—384 (1947) [Russisch].

Un courant placé sursonique s'échappe de l'orifice d'un vase à parois planes; le phénomène est symétrique par rapport à Ox ; le débit est supposé maxima. L'A. a déjà montré [cf. Izvestija Akad. Nauk SSSR 9, 121—143 (1945)] que l'étude de l'écoulement revient à la solution d'un problème de Tricomi posé relativement à l'équation de Tschaplyguine. Ici, l'A. construit la solution numérique du problème, traduite par des tables et des graphiques; les calculs semblent avoir été laborieux, leur exécution a requis la collaboration d'une équipe de spécialistes.

J. Kravtchenko (Grenoble).

Meyer, R. E.: Focusing effects in two-dimensional, supersonic flow. Philos. Trans. R. Soc., London, A 242, 153—171 (1949).

Für die Untersuchung von stationären, wirbelfreien, ebenen Überschallströmungen erweist sich der Übergang zu charakteristischen Koordinaten als nützlich. In der vorliegenden Arbeit wird auf dieser Grundlage ein neues Verfahren entwickelt, bei dem die physikalischen Begriffe des Strömungsfeldes durch die rein geometrischen Eigenschaften des Machschen Liniennetzes interpretiert werden. Auf diese Weise gehen die nichtlinearen Bewegungsgleichungen über in die linearen „focusing equations“ für die vom Verf. eingeführten Längenparameter. Das Verfahren wird insbesondere auf die Behandlung nichtanalytischer Eigenschaften des Strömungsfeldes angewandt, und zwar zunächst auf das Anwachsen von Unstetigkeiten des Geschwindigkeitsgradienten oder von Unstetigkeiten höherer Ordnung, die sich entlang der entsprechenden Machschen Linien ausbreiten. Auch die Reflexion solcher Unstetigkeiten an der Schallgrenze wird nach dieser geometrischen Methode betrachtet. Besonders eingehend werden Singularitäten der Überschallströmung behandelt, die aus Grenzlinien des Machschen Liniennetzes in der physikalischen Ebene oder aus Verzweigungslinien in der Charakteristikebene bestehen. Es wird gezeigt, daß die Ergebnisse von Craggs [Proc. Cambridge philos. Soc. 44, 360—379 (1948)] auch dann gültig bleiben, wenn Störungen von höherer als erster Ordnung gleichzeitig auftreten. Die Untersuchung wird weiterhin auf den Fall ausgedehnt, daß sowohl die Hodographentransformation (bzw. Charakteristiken transformation) als auch gleichzeitig die inverse Transformation singular sind. Es werden hierfür Beispiele gegeben, die bisher nicht beschrieben worden sind. Abschließend wird noch ein Überblick über das Problem der Entstehung eines schrägen Verdichtungsstoßes inmitten des Strömungsfeldes gegeben. In einem Zusatz wird gezeigt, daß die übliche Charakteristikenmethode in der Nähe einer Verzweigungslinie abgeändert werden muß, wenn eine Genauigkeitseinbuße vermieden werden soll. *Wuest.*

Germain, Paul et Roger Bader: Étude de certains mouvements vibratoires harmoniques à l'aide d'une correspondance avec les mouvements homogènes. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1201—1202 (1949).

Verff. betrachten die instationäre, linearisierte Differentialgleichung der Gasdynamik für harmonisch pulsierende Strömungen und geben an, wie man von Lösungen des stationären Problems [P. Germain: La théorie des mouvements homogène. Recherche aeronautique 1947, Nr. 7] in einfacher Weise zu solchen des instationären gelangen kann. *Wendt* (Bonn).

Stanjuković, K. P.: Ebene und achsensymmetrische nicht stationäre Gasströmungen. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 64, 179—181 (1949) [Russisch].

L'A. forme le système des équations indéfinies des mouvements non permanents, à symétrie axiale (à vitesses contenues dans le plan méridien) d'un gaz parfait compressible, en tenant compte des variations de l'entropie. Il construit ensuite les solutions particulières du système précédent qui soient — à des facteurs variables donnés près — des fonctions de la seule variable $z = r^\alpha t^\beta e^{\varepsilon\theta}$ (r rayon vecteur; θ l'angle de nutation; t le temps; $\alpha, \beta, \varepsilon$ des constantes). Il discute l'existence de quelques mouvements du type précédent qui soient, de plus, irrotationnels ou plans, etc. *J. Kravtchenko* (Grenoble).

Davies, T. V.: Unsteady compressible flow in two dimensions. Proc. R. Soc., London, A 199, 468—486 (1949).

Für instationäre, ebene Gasströmungen wird eine linearisierte Störungstheorie entwickelt, wobei die Grundströmung als stationäre, wirbelfreie, kompressible Strömung angenommen wird. Die als klein vorausgesetzte Störungsströmung ist dann durch zwei lineare partielle Differentialgleichungen bestimmt, die auf Potential- und Stromfunktionskoordinaten transformiert werden. Die Theorie wird am Beispiel der Strömung um einen periodisch „atmenden“ Kreiszylinder erläutert. Die Lösung wird als Reihenentwicklung nach Besselschen Funktionen angesetzt und die Fortpflanzung von Wellen untersucht. *Wuest* (Göttingen).

Craggs, J. W.: The breakdown of the hodograph transformation for irrotational compressible fluid flow in two dimensions. Proc. Cambridge philos. Soc. 44, 360—379 (1948).

Verf. untersucht die Singularitäten der nach Molenbroek-Tschaplygin auf die uv - bzw. $q\theta$ -Hodographenebene vorgenommenen Abbildung einer wirbelfreien, adiabatisch-kompressiblen, zweidimensionalen Strömung der xy -Ebene, u. a. auch in der Absicht, Kriterien für den Zusammenbruch einer solchen Strömung zu

finden. Dazu werden zunächst ganz allgemein $u = u(x, y)$ und $v = v(x, y)$ als analytische, eine Abbildung der xy - auf die beliebige uv -Ebene vermittelnde Funktionen vorausgesetzt. Ein Punkt der xy -Ebene heißt von n -ter Ordnung, wenn in ihm alle nach x und y genommenen Ableitungen der Funktionaldeterminante $J = \partial(u, v)/\partial(x, y)$ bis zu den $(n-1)$ -ten verschwinden; jeder Punkt mindestens 1. Ordnung heißt singulär. Der Fall, daß J in einem Gebiet der xy -Ebene identisch verschwindet, darf ausgeschlossen werden; für die Zwecke der Hodographenmethode genügt die Betrachtung der Punkte 1. und 2. Ordnung. Es ergibt sich: Singuläre Punkte 1. Ordnung P liegen stets auf singulären Kurven S . Bei einer solchen Kurve S ist — abgesehen von angebbaren Ausnahmefällen — jedem ihrer Punkte eine ausgezeichnete Richtung zugeordnet, derart, daß das Bild jeder S in P in dieser ausgezeichneten Richtung durchsetzenden Kurve in der uv -Ebene im Bildpunkt Q von P eine Spitze aufweist, falls nicht gerade die Richtung von S in P mit der ausgezeichneten Richtung in P zusammenfällt. In diesem Fall hat im allgemeinen das Bild L von S in Q selbst eine Spitze, und nur solche Berührkurven von S in P , die hier eine gewisse Krümmung aufweisen, können in Q ohne, alle anderen Berührkurven dagegen nur mit Spitze verlaufen. Ferner wird die beiderseitige Umgebung einer singulären Linie 1. Ordnung S auf nur ein Ufer der Bildkurve L abgebildet. In der Umgebung isolierter Singularitäten P 2. Ordnung, in denen $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$, findet eine doppelte Überdeckung der uv -Ebene statt. Verschwinden in einem Schnittpunkt zweier singulärer Kurven S_1 und S_2 1. Ordnung wieder die partiellen ersten Ableitungen von u und v , so wird die xy -Ebene auf einen vierfach überdeckten Winkelraum der uv -Ebene abgebildet; bei Berührung von S_1 und S_2 entsteht eine Abbildung auf die zweifach überdeckte uv -Halbebene. Entsprechende Aussagen lassen sich für die weiteren Fälle bei Singularitäten zweiter Ordnung machen. — Diese Ergebnisse werden auf die Hodographenabbildung und deren Umkehrung angewandt, indem unter Zuhilfenahme der Machschen Linien Singularitäten in beiden Ebenen betrachtet werden; dabei muß gegebenenfalls zwischen Unter- und Überschallströmungen unterschieden werden. Die bekannten Erscheinungen der Durchsetzung verschiedener Stromlinien und damit des Zusammenbruchs einer Strömung finden sich in diese systematische Behandlung eingeordnet. Zum Schluß wird einem von Bickley (Critical conditions for compressible flow; Aeronautical Research Committee, Nr. 9657) vorgeschlagenen unbefriedigenden Kriterium für den Zusammenbruch einer Strömung ein auf Grund der vorhergehenden Untersuchungen naheliegendes gegenübergestellt.

Grell (Berlin).

Shapiro, Ascher H. and Gilbert M. Edelman: Tables for numerical solution of problems in compressible gas flow with energy effects. J. appl. Mech., New York 15, 169—175 (1948).

Für die eindimensionale, adiabatische, stationäre Gasströmung werden Tabellen angegeben, die zu vorgegebener Machscher Zahl M die Zustandsgrößen T_0/T_0^* , T_0/T^* , p/p^* , p_0/p_0^* , ρ/ρ^* (T Temperatur, p Druck, ρ Dichte, Index 0 für $M = 0$, Index * für kritischen Zustand. Wegen der Bedeutung der bei Änderung der Stautemperatur auftretenden Größen T_0/T_0^* , p_0/p_0^* wird auf Shapiro-Hawthorne, dies. Zbl. 30, 229 verwiesen) auf 3 bis 4 geltende Ziffern abzulesen gestattet. Die Arbeit enthält Tabellen für $\kappa = c_p/c_v = 1; 1,2; 1,3; 1,65$ für die Machschen Zahlen 0; 0,5; . . . ; 3; 3,5; . . . , 5; 6; . . . ; 10. Die Tabelle für $\kappa = 1,4$ gibt die Funktionswerte für $M = 0$ bis $M = 3$ (Differenz 0,01), $M = 3$ bis $M = 5$ (Differenz 0,5), $M = 6, . . . , 10$.

Wendt (Bonn).

Hicks, Bruce L.: Diabatic flow of a compressible fluid. Quart. appl. Math. 6, 221—237 (1948).

Verf. bezeichnet als diabatische Strömung eine nichtadiabatische Gasströmung. In den Differentialgleichungen der Gasdynamik tritt an die Stelle des Adiabatengesetzes eine Gleichung, die die der Strömung zugeführte Wärmemenge angibt.

Die vorliegende Arbeit bringt Umformungen der Differentialgleichungen einer stetigen diabatischen Gasströmung auf eine geringere Anzahl von Grundgleichungen, für die die Fälle der rotationsbehafteten und rotationsfreien Strömungen eingehender diskutiert werden. — Auf spezielle technische Anwendungen wird nicht eingegangen.

Wendt (Bonn).

Tangren, R. F., C. H. Dodge and H. S. Seifert: Compressibility effects in two-phase flow. J. appl. Physics, Lancaster Pa. 20, 637—645 (1949).

Verff. betrachten die eindimensionale Strömung von innigen Gemischen eines idealen Gases und einer nicht-zusammendrückbaren Flüssigkeit. Es werden die Zustandsgleichung, die Adiabatangleichung, die Bernoullische Gleichung und der Ausdruck für die Schallgeschwindigkeit solcher Gemische angegeben. Genauer wird auf die Strömung durch Lavaldüsen eingegangen, für deren Behandlung Zahlen- tafeln und graphische Darstellungen der Arbeit beigegeben sind.

Wendt (Bonn).

Lin, C. C. and S. I. Rubinov: On the flow behind curved shocks. J. Math. Physics, Massachusetts 27, 105—129 (1948).

Im ersten Teil werden nach der Aufstellung der Grundgleichungen die Differentialbeziehungen erster Ordnung am Verdichtungsstoß aufgestellt. Im zweiten Teil werden am Körper aufsitzende Stöße behandelt, wobei Ergebnisse von Crocco bestätigt werden. Das wichtigste Ergebnis bildet ein Satz über senkrecht am Körper aufsitzende Stöße, der seit langem schon Busemann bekannt war. Eine solche Stoßwelle kann auf einer konvexen (konkaven) Fläche mit stetiger Krümmung nur auftreten, wenn die Machsche Zahl oberhalb (unterhalb) einer gewissen kritischen Machschen Zahl liegt. Der dritte Teil beschäftigt sich mit der Behandlung der Unterschallströmung hinter einem vom Körper abgelösten Verdichtungsstoß.

Wendt (Bonn).

Cabannes, Henri: Détermination approchée de l'onde de choc détachée. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 492—493 (1949).

Verf. gibt in großen Zügen den Weg an, der es gestattet, für eine rotations- symmetrische Gasströmung mittels der Croccoschen Stromfunktion Lage und Krümmung des Verdichtungsstoßes vor der Nase des Körpers zu bestimmen.

Wendt (Bonn).

Bleakney, Walker and A. H. Taub: Interaction of shock waves. Rev. modern Physics, New York 21, 584—605 (1949).

Verff. geben einen Überblick über die modernen experimentellen Methoden zur Untersuchung von Verdichtungsstößen. Theoretische Betrachtungen werden über die Reflexion eines schiefen Verdichtungsstoßes an einer festen Wand und über Machsche Reflexion (gegabelte Stöße) vorgetragen.

Wendt (Bonn).

Thomas, T. Y.: The consistency relations for shock waves. J. Math. Physics, Massachusetts 28, 62—90 (1949).

Wenn die Strömung vor einer Stoßlinie gleichförmig ist, so gibt es eine Beziehung zwischen der Krümmung κ in einem beliebigen Punkt der Stoßlinie und der Krümmung K der Stromlinie in diesem Punkt hinter der Stoßlinie. Die n -te Ableitung K_n von K nach der Bogenlänge, längs der Stromlinie hinter der Stoßlinie gemessen, läßt sich als „Verträglichkeitsbedingung für ebene Stoßwellen“ in der Form $K_n = G_n(M^2, \alpha) \kappa_n + H_n$ schreiben, wo M die Machsche Zahl der ungestörten Strömung und α die Neigung der Stoßlinie ist und κ_n die n -te Ableitung der Krümmung κ nach der Bogenlänge, längs der Stoßlinie gemessen, ist. Die Funktion H_n ist ein Polynom in κ und den κ_m mit $m < n$, dessen Koeffizienten von α und M^2 abhängen. Für mehrere diskrete Werte von M , für die in einer früheren Arbeit [J. Math. Physics, Massachusetts 27, 279 (1949)] $G_0(\alpha)$ berechnet worden war, wird nun auch $G_1(\alpha)$ mitgeteilt.

Pretsch (Frankfurt/M.-Höchst).

Astaf'ev, V. M.: Die Differentialgleichungen der Gasturbinen mit einer unendlichen Anzahl von Schaufeln und ihre Integrale. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 68, 449—452 (1949) [Russisch].

L'étude des turbines, d'après Stodola, repose sur l'emploi d'un schéma abstrait: le système tournant est considéré comme formé d'une infinité d'aubes infiniment minces. L'A. propose ici une variante de cette méthode. On introduit un système particulier de coordonnées curvilignes (r_0 , φ , s), liées au système tournant (avec la vitesse angulaire constante); les surfaces coordonnées $\varphi = \text{Cte}$ sont les surfaces des aubes; les surfaces $r_0 = \text{Cte}$ sont certaines surfaces de courant. En écrivant dans ce système les équations de l'écoulement, l'A. obtient d'abord une extension du théorème de Bernoulli à un repère tournant, puis les formes d'aubes réalisant quelques écoulements remarquables. *J. Kravtchenko.*

Roy, Maurice: Écoulement théorique et médian dans un rotor à palettes radiales. C. r. Acad. Sci., Paris 227, 496—498 (1948).

Berechnung einer relativ stationären Strömung einer idealen, schwerelosen Flüssigkeit durch ein rotierendes Schaufelrad mit N ebenen Schaufeln, in der Symmetrieebene $z = 0$. Die Bewegung wird aus drei Teilen zusammengesetzt: der ebenen Rotationsbewegung, einer wirbel- und divergenzfreien ebenen Bewegung und einer wirbelfreien Bewegung, die die durchströmende Menge liefert. Von der konformen Abbildung der N -fach geschlitzten Ebene wird Gebrauch gemacht, die Endformeln und einige Zahlen werden angegeben. Vgl. hierzu die Arbeiten von F. Florin [Ebene Bewegung eines Wirbelkranzes am rotierenden radialen Schaufelstern, Z. angew. Math. Mech. 20, 152—164 (1940)] und Kucharski [Z. angew. Math. Mech. 21, 65—79 (1941); dies. Zbl. 25, 337]. *Hamel (Landshut).*

Goland, Martin and Y. L. Luke: The flutter of an uniform wing with tip weights. J. appl. Mech., New York 15, 13—20 (1948).

Die Flatterbewegung eines Tragflügels, der längs der Spannweite gleichförmige aerodynamische und Festigkeitseigenschaften und außer dem Leitwerk ein Endgewicht besitzt, wird nach einer von der gewöhnlichen (Rayleighschen) abweichenden „exakten“ Methode untersucht. Dabei werden die Luftkräfte in ihrer Abhängigkeit von der Flügelbewegung in die Differentialgleichungen für die Koordinaten- und Winkelabweichungen des einzelnen Flügelschnitts eingeführt und die Integration des entstehenden linearen Systems mit Hilfe der Laplace-Transformation durchgeführt. An einigen numerischen Beispielen wird gezeigt, daß die Rayleighsche Methode gegenüber der „exakten“ Fehler bis zu 6% in der Flattergeschwindigkeit liefert, was praktisch nicht unbedenklich ist. — Die Ausdrücke für die Luftkräfte, die hierbei benutzt werden, sind allerdings selbst nicht exakt, was Verf. auch bemerkt, aber für unbedenklich hält. Ref. kann sich dieser Ansicht nicht ohne weiteres anschließen; es ist nicht einzusehen, warum die durchaus mögliche Berücksichtigung der endlichen Spannweite anscheinend immer noch nicht erfolgt, sondern immer noch mit den Ausdrücken gerechnet wird, wie sie sich aus der ebenen Theorie ergeben. *Schmeidler (Berlin).*

Plunkett, R.: A matrix method of calculating propellerblade moments and deflections. J. appl. Mech., New York 16, 361—369 (1949).

Die Biegunsberechnung eines Propellers unter dem Einfluß der Luftkräfte und der Zentrifugalkraft wird nicht durch Aufstellung der Biegungs-Differentialgleichungen, sondern unter der Vorstellung durchgeführt, daß das Blatt durch eine Reihe von konzentrierten Massen ersetzt wird, die starr verbunden sind, während die Knotenpunkte elastische Bewegungen ermöglichen. Das entstehende Gleichungssystem wird unter Heranziehung der Matrizenschreibweise behandelt, wobei für jeden Knotenpunkt die Hauptträgheitsachsen des betreffenden Profils zugrunde gelegt sind. Die Methode nutzt gewisse Symmetrien aus, wodurch die Rechenarbeit reduziert wird. Die Durchführung erfolgt durch schrittweise Näherung. Änderungen

der gegebenen Größen können in übersichtlicher Form berücksichtigt werden. Ein Zahlenbeispiel erläutert die Methode. *Schmeidler* (Berlin).

Teofilato, Pietro: *Aerodinamica e metodi matematici*. Archimede, Firenze 1, 259—265 (1949).

Elektrodynamik:

Amadori, Elena: Una proprietà della resistenza ohmica nei conduttori a tre dimensioni. *Atti Sem. mat. fis. Univ., Modena* 3, 221—222 (1949).

Mathematischer Beweis des folgenden physikalisch evidenten Satzes: Es sei L ein dreidimensionaler homogener Leiter. Σ sei der Teil der Oberfläche von L , der an das isolierende Dielektrikum grenzt. S_1, S_2 seien diejenigen beiden Teile der Oberfläche, die an die beiden Elektroden grenzen. Der ebenfalls dreidimensionale homogene Leiter L' entstehe aus L dadurch, daß man L um einen Leiter L_1 vergrößert, der längs eines Teiles von Σ Kontakt mit L hat, die Elektroden aber ungeändert läßt. Ist R der Ohmsche Widerstand von L und R' der von L' , so gilt $R > R'$. *Rinow* (Greifswald).

Smith, P. D. P.: Tensor field equations in a region of variable refractive index. *J. appl. Physics, Lancaster Pa.* 20, 633 (1949).

Die Maxwell'schen Gleichungen für ruhende Medien werden in der bekannten vierdimensionalen Tensorform dargestellt unter Berücksichtigung von zeitlich und räumlich veränderlichen Materialkonstanten ε, μ . *Rinow* (Greifswald).

Kahan, T. and G. Eckart: On the electromagnetic surface wave of Sommerfeld. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S.* 76, 406—410 (1949).

Nach Sommerfeld kann man den Hertz'schen Vektor für das Feld einer Vertikalantenne über ebener Erde bestimmen durch drei Integrale J_Q, J_P, J_{Q_E} über geeignet gewählte Wege Q, P, Q_E (Bezeichnungen nach Sommerfeld, Partielle Differentialgleichungen der Physik, Leipzig 1947). J_P gibt dabei Anlaß zu der Oberflächenwelle. Die Verf. zeigen, daß J_Q den Anteil der Oberflächenwelle mit umgekehrtem Vorzeichen enthält, so daß diese gar nicht vorhanden ist in Übereinstimmung mit Messungen von Burrows [*Proc. Inst. Radio Engineers* 25, 219 (1937)]. Zum Beweise zeigen sie das Vorhandensein eines Sattelpunktes in der Nähe von P . Die beiden — einzeln die Oberflächenwelle ergebenden — Sattelpunktintegrale heben sich gegenseitig auf. *Kockel* (Leipzig).

Piloty, Hans: Die Brücken-Reaktanzen eines symmetrischen Filters mit vorgeschriebenem Betriebsverhalten. *S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München* 1947, 129—138 (1949).

Zwei Filter, für die der Betriebsübertragungsfaktor des einen mit dem Echo-Übertragungsfaktor des anderen bei Betrieb zwischen denselben Widerständen übereinstimmt, heißen konjugiert. Ihre Realisierung kann durch Brücken erfolgen, wenn die zugehörigen Reaktanzen $z_a(\lambda)$ und $z_b(\lambda)$ vorgegeben sind. Es wird ein möglichst einfaches Verfahren zur Gewinnung der Brückenreaktanzen in Form von gekürzten Brüchen angegeben, wenn die das Betriebsverhalten charakterisierenden Polynome $P(\lambda)$ und $F(\lambda)$, die keinen Teiler mit rein imaginären Wurzeln gemeinsam haben und von denen das eine gerade, das andere ungerade ist, vorgegeben sind. Bezug genommen wird u. a. auf eine briefliche Mitteilung von W. Cauer †.

Schmeidler (Berlin).

Piloty, Hans: Die Halbierung eines symmetrischen Reaktanz-Vierpols. *S.-B. math.-naturw. Abt. Bayer. Akad. Wiss. München* 1947, 187—236 (1949).

Unter Halbierung eines symmetrischen Vierpols wird die Aufgabe verstanden, einen Vierpol zu finden, der mit seinem Spiegelbild in Kette geschaltet einen symmetrischen, zu dem vorgegebenen Vierpol äquivalenten Vierpol ergibt. In Matrizen-

sprache bedeutet das die Zerlegung

$$\begin{pmatrix} g_1 & u_1 \\ u_2 & g_2 \end{pmatrix} \frac{1}{g} \cdot \begin{pmatrix} g_2 & u_1 \\ u_2 & g_1 \end{pmatrix} \frac{1}{g} = \begin{pmatrix} G_1 & U_1 \\ U_2 & G_1 \end{pmatrix} \frac{1}{G},$$

wobei die Matrizen in reduzierter und normierter Polynomform geschrieben sind. G, G_i, g, g_i sind dabei gerade (ungerade), U_i und u_i ungerade (gerade) Polynome in $\lambda = i\omega$. Es gilt dann der Satz, daß die Halbierbarkeit dann und nur dann möglich ist, wenn die Koeffizienten von G_i und U_i positiv sind und G Nullstellen ungerader Ordnung höchstens auf der imaginären λ -Achse besitzt. Diese Halbierung ist dann nur auf eine Weise möglich, bis auf die Willkür einer Konstanten k , die das Hinzufügen eines idealen Übertragers beliebiger Übersetzung am rechten Ende der linken Hälfte und eines Übertragers reziproker Übersetzung am linken Ende der rechten Hälfte bedeutet. Es folgen ergänzende Betrachtungen. *Schmeidler.*

Esnault-Pelterie, Robert: Il n'y a pas de systèmes UES ni UEM, il y a des systèmes d'unités dimensionnellement amorphes, dont les unités sont reliées par des coefficients indimensionnés, systèmes dont chacun peut être fait à volonté électrostatique ou électromagnétique. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 337—341 (1950).

Optik:

Parke III, Nathan Grier: Optical algebra. J. Math. Physics, Massachusetts 28, 131—139 (1949).

Verf. weist auf die verschiedenen, von Wiener (im Anschluß an Rayleigh und Schuster) bzw. von Jones bzw. von Mueller entwickelten Wege der Behandlung optischer Fragen hin, die sich in erster Linie nicht mit der Abbildung, sondern mit Fragen der Polarisation und Kohärenz beschäftigen. Die Überlegungen von Jones basieren auf dem elektrischen Vektor, die von Mueller auf dem Stokes'schen Vektor. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist, den mathematischen Zusammenhang der Arbeiten von Wiener, Jones und Mueller zu bestimmen. *Picht.*

Mindlin, Raymond D. and Lawrence E. Goodman: The optical equations of three-dimensional photoelasticity. J. appl. Physics, Lancaster Pa. 20, 89—95 (1949).

Das optische Hauptproblem bei der dreidimensionalen Photoelastizität ist das der Ausbreitung des Lichtes in inhomogenen, anisotropen Medien. Der Verf. weist darauf hin, daß das entsprechende Problem für homogene, anisotrope sowie für inhomogene, isotrope Medien bereits sehr häufig behandelt wurde, daß aber für den allgemeineren Fall der gleichzeitigen Inhomogenität und Anisotropie bisher nur zwei Untersuchungen vorliegen, die sich auf Spezialfälle jenes allgemeinen Falles beschränken. In der einen Arbeit wurde angenommen, daß die Hauptachsen des Schnittes des (Brechungs-)Indexellipsoids mit einer Ebene senkrecht zur Wellennormalen des Lichtes linear längs der Wellennormalen variieren. In der zweiten Arbeit wird vorausgesetzt, daß die Hauptachsen jener Schnittebene als lineare Funktionen des Abstandes (von einer der Schnittebenen) längs der Wellennormalen rotieren. Beide Lösungen unterscheiden sich nur wenig von den entsprechenden Lösungen, die sich auf Grund einfacher kinematischer Betrachtungen aus Näherungsgleichungen ableiten lassen, obwohl die betreffenden Arbeiten von den dynamischen Gleichungen ausgehen, die für die Probleme der Lichtausbreitung maßgebend sind. Da diese dynamischen Gleichungen indessen mit zunehmender Kompliziertheit des Druckzustandes schnell wachsend schwieriger werden, ist einer der Zwecke vorliegender Arbeit, den Übergang der dynamischen zu den kinematischen Gleichungen genauer zu untersuchen, d. h. den Übergang von den Maxwellschen zu den Neumannschen Gleichungen, und hierbei die Natur und die Größenordnung der erforderlichen Approximationen genauer zu diskutieren. Es werden zunächst die elektromagnetischen und die druck-optischen Gleichungen in Zusammenhang gebracht. Es folgen zwei- und dreidimensionale Betrachtungen der optischen Wellengleichungen der Photoelastizität, der Übergang zu den Neumannschen Gleichungen und — als Hauptergebnis — die Zurückführung der Gleichungen auf eine kanonische Form, die die Behandlung weiterer Sonderfälle gestatten. *Picht (Potsdam).*

Mindlin, Raymond D.: A mathematical theory of photoviscoelasticity. J. appl. Physics, Lancaster Pa. 20, 206—216 (1949).

Nach einigen allgemeinen Bemerkungen über photoelastische Erscheinungen in zähelastischen Medien — bestehend etwa aus m elastischen Elementen und einer

gleichen, kleineren oder größeren Zahl zäher (viscöser) Elemente —, in denen der Verf. darauf hinweist, daß deren Beschreibung zeitabhängige Beziehungen zwischen drei zweireihigen Tensoren (Doppelbrechung, Druck und Spannung) enthalten muß und in Hinblick auf mechanische Probleme auch die Raumabhängigkeit (nicht-homogene Spannung) und die Temperaturabhängigkeit berücksichtigen sollte, gibt er unter der Annahme, daß die Doppelbrechung nur von der Deformation der elastischen Elemente abhängt, als allgemeinste lineare, isotrope Beziehung zwischen der Doppelbrechung und der Spannung eine Formel an

$$\Pi - n_0^{-2} \mathbf{1} = \sum_{k=1}^m (c_k \Phi'_{dk} + d_k \theta'_k \mathbf{1}) \quad \text{mit} \quad \Phi'_{dk} = \Phi'_k - \theta'_k \mathbf{1},$$

in der Π die Brechungsindex-Dyade ist, für die die Gleichung $\mathbf{r} \Pi \mathbf{r} = 1$ (mit \mathbf{r} = Radiusvektor vom Mittelpunkt des Ellipsoids zu seiner Oberfläche) des Fresnelschen Indexellipsoids gilt, ferner Φ'_k die kleine reine Spannungsdyade des k -ten elastischen Elementes, θ'_k seine mittlere Spannung (d. h. $1/3$ der kubischen Dilatation), $\mathbf{1}$ die Identitätsdyade, n_0 der Brechungsindex des spannungsfreien Mediums und c_k und f_k spannungsoptische Koeffizienten bedeuten. Diese Formel wird auf ein idealisiertes Medium angewandt, das sich durch ein einfaches mechanisches Modell veranschaulichen läßt, wie vom Verf. geschehen ist. Es werden optische Druck-Spannungs-Zeit-Temperaturbeziehungen abgeleitet. Diese werden benutzt, um Bedingungen zu finden, unter denen aus viscoelastischem Material hergestellte Modelle in der photoelastischen Methode benutzt werden können, um Grenzwertprobleme in der linearen Theorie der Elastizität zu lösen.

Picht (Potsdam).

Meixner, J.: Die Kantenbedingung in der Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an vollkommen leitenden ebenen Schirmen. Ann. Physik, VI. F. 6, 2—9 (1949).

Verf. weist darauf hin, daß die elektromagnetische Feldstärke in elektromagnetischen Feldern in der Umgebung der Kanten vollkommen leitender Flächen, die sich in dem Felde befinden, unendlich groß wird und daß die Ordnung dieses Unendlichwerdens zweckentsprechend eingeschränkt werden muß, um elektromagnetische Randwertprobleme, insbesondere Beugungsprobleme, lösen zu können. Diese Einschränkung der Ordnung des Unendlichwerdens wird durch die vom Verf. angegebene „Kantenbedingung“ erreicht, die besagt, daß die elektromagnetische Energiedichte in der Umgebung der Kante integrierbar sein muß, die Feldenergie in jedem endlichen Volumen also endlich ist. Verf. weist auf analoge Bedingungen bzw. Verhältnisse bei der Schallbeugung hin, bei der zwar der Schalldruck an der Schirmkante endlich bleibt, nicht aber die Schallschnelle. Es wird zunächst der elektrostatische Grenzfall näher behandelt, bei dem ein elektrostatisches Feld gesucht wird, dessen Tangentialkomponenten auf einer im Felde befindlichen Kreisscheibe verschwinden sollen und das in großer Entfernung in ein homogenes elektrisches Feld parallel zu einem Durchmesser der Kreisscheibe übergehen soll. Dieses skalare Problem wird durch Einführung des Hertzschen Vektors in verallgemeinerter Weise behandelt, da dieser den Übergang zu Schwingungsfeldern gestattet. Es werden sodann die elektromagnetischen Feldstärken an der Schirmkante bestimmt, und es wird gezeigt, daß die Komponenten höchstens wie $r^{-\frac{1}{2}}$ unendlich werden. Die Debye'schen Potentiale müssen daher mit einer Konstanten beginnen und dürfen kein Glied der Potenz $r^{\frac{1}{2}}$ (r = Abstand von der Schirmkante) enthalten. Es wird zum Schluß noch gezeigt, wie der Eindeutigkeitsbeweis — ausgehend vom Energiesatz —, für die sich bei Beachtung der Kantenbedingung ergebende Lösung zu führen ist. Auch wird erwähnt, daß die Sommerfeldsche Lösung der Beugung einer ebenen elektromagnetischen Welle an der vollkommen leitenden Halbebene der Kantenbedingung genügt.

Picht (Potsdam).

Braunbek, Werner: Energieströmung im Nahfeld einer beugenden Kante. Ann. Physik, VI. F. 6, 53—58 (1949).

Ausgehend von der Sommerfeldschen Lösung der Beugung an der Kante eines unendlich dünnen, unendlich gut leitenden Schirmes untersucht Verf. durch Spezialisierung jener Lösung auf die nächste Umgebung der beugenden Kante das Verhalten der elektrischen sowie der magnetischen Feldstärke, wobei er voraussetzt, daß die Fortpflanzungsrichtung der einfallenden Welle senkrecht zur Schirmebene liegt und daß es sich um eine linear polarisierte ebene Welle handelt, deren elektrischer Vektor parallel der beugenden Kante schwingt. Es werden die Phasenflächen in der Umgebung der beugenden Kante berechnet, und zwar getrennt für die einzelnen Komponenten des elektrischen bzw. magnetischen Feldes, nicht aber für das magnetische Feld selbst. Der Verf. zieht daraus den Schluß, daß es Phasenflächen schlechthin im allgemeinen elektromagnetischen Wellenfeld nicht gibt, und betont, daß es sich zeigen lasse, daß die Stromlinien der Energieströmung im allgemeinen elektromagnetischen Feld nicht einmal Orthogonalflächen zu haben brauchen. Das elektrische Feld ist im ganzen Raum linear polarisiert, während das magnetische Feld im allgemeinen elliptisch polarisiert ist. In erster Näherung ist aber auch das magnetische Feld linear polarisiert. Es schwingt in 90° Phasendifferenz zum elektrischen Feld, so daß der Energiestrom (in erster Näherung) den zeitlichen Mittelwert Null besitzt, also einen reinen Blind-Energiestrom darstellt. Der Wirk-Energiestrom (Zeitmittel des Energiestroms über eine Periode) ergibt sich bei Berücksichtigung der Glieder zweiter Ordnung. Die Strömungslinien bilden parabolische Zylinder mit der beugenden Kante als Brennnlinie und zum beugenden Schirm hin geöffnet, während die Phasenflächen von E_z und H_φ entsprechende, aber nach der entgegengesetzten Seite hin geöffnete parabolische Zylinder sind (z, r, φ Zylinderkoordinaten mit der beugenden Kante als z -Achse). Die Phasenflächen von H_r sind Zylinderflächen vierter Ordnung. Der Energiestrom um die Kante wird noch näher diskutiert.

Picht (Potsdam).

Croze, François et Émile Durand: Sur les expressions du principe de Huyghens pour les ondes électromagnétiques. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 236—239 (1949).

Croze, François et Pierre Boillet: Sur l'expression du principe de Huyghens pour les ondes électromagnétiques. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 305—307 (1949).

Croze, François et Georges Darmois: Réduction à l'unité des expressions du principe de Huyghens pour les ondes électromagnétiques. C. r. Acad. Sci., Paris 228, 824—826 (1949).

Verff. legen dar, daß die von einer Reihe von Autoren angegebenen Formeln der Kirchhoffschen Beugungstheorie für elektromagnetische Wellen miteinander übereinstimmen und sich durch eine fiktive Belegung mit elektrischen und magnetischen Dipolen darstellen lassen. Abweichende Formeln (welche insbesondere von Foix und Luneberg angegeben wurden) genügen nicht den Anforderungen, welche an die Kirchhoffsche Beugungstheorie zu stellen sind.

W. Franz (Münster).

Brodin, Jean: Expression générale du principe de Huyghens pour les propagations amorties d'ondes longitudinales. C. r. Acad. Sci., Paris 229, 989—991 (1949).

Verf. zeigt, daß eine im Äußeren (oder Inneren) einer geschlossenen Fläche reguläre longitudinale Welle durch den Wert der Erregung oder durch die Normalableitung an der Fläche eindeutig festgelegt ist. Ist die Normalableitung vorgegeben, dann läßt sich mit Hilfe einer Fredholmschen Integralgleichung eine Belegung der Fläche mit strahlenden Polen finden, welche die vorgegebene Welle erzeugen. Ist dagegen die Erregung an der Fläche vorgegeben, dann bestimmt sich aus einer anderen Fredholmschen Integralgleichung eine Doppelbelegung, welche die gewünschte Welle ausstrahlt. Diese beiden Lösungen des Problems lassen sich so kombinieren, daß jenseits der Fläche die Erregung null resultiert — dies führt auf das Kirchhoffsche Integral.

W. Franz (Münster).

Brodin, Jean: Application du principe de Huyghens au dioptré: expression des ondes réfléchies et réfractées. C. r. Acad. Sci., Paris 230, 67—69 (1950).

Die an einem geschlossenen Körper gebrochene und reflektierte Welle wird vom Verf. nach dem Huyghensschen Prinzip berechnet, indem er die Oberfläche mit elektrischen und magnetischen Dipolschichten $\vec{\rho}$ und $\vec{\mu}$ belegt, welche den folgenden Bedingungen genügen: 1. Wäre das Innere des Körpers mit demselben Material erfüllt wie der Außenraum, dann würde durch $\vec{\rho}$, $\vec{\mu}$ im Körper gerade die einfallende Welle neutralisiert. 2. Wäre auch der Außenraum mit dem Material des Körpers erfüllt, dann würde $\vec{\rho}$, $\vec{\mu}$ im Außenraum keine Erregung hervorrufen. — Verf. zeigt, daß dann $\vec{\rho}$ und $\vec{\mu}$ im Außenraum die reflektierte Welle erzeugen und $-\vec{\rho}$, $-\vec{\mu}$ im Inneren die gebrochene. — Die Bedingung 2. erlaubt, $\vec{\mu}$ mit Hilfe einer linearen Operation aus $\vec{\rho}$ zu berechnen, und die Bedingung 1. führt dann zu einer Fredholmschen Integralgleichung für $\vec{\rho}$. — Für unendlich große Leitfähigkeit (oder Dielektrizitätskonstante) ergibt sich $\vec{\mu} = 0$, man hat also nur eine elektrische Doppelschicht, welche mit den tatsächlich auf der Oberfläche des Leiters induzierten Dipolen übereinstimmt. W. Franz (Münster).

Schaefer, Clemens und Conrad v. Fragstein: Zur Theorie der Reflexion und Brechung. Ann. Physik, VI. F. 6, 39—43 (1949).

Im Anschluß an Gedankengänge, die früher von Cl. Schäfer und Ruth Pich [Ann. Physik, V. F. 30, 245—266 (1937); dies. Zbl. 17, 234] für die Behandlung der Totalreflexion benutzt wurden, und im Anschluß an eine Arbeit von C. v. Fragstein (dies. Zbl. 31, 333) behandeln Verff. die Reflexion und Brechung von Strahlenbündeln endlicher Öffnung — siehe zu diesem Thema auch die Arbeiten des Ref., Z. Physik 39, 933—945, 40, 521—529 (1926) — und finden, daß bei der Reflexion an allen Medien außer an isolierenden das reflektierte Strahlenbündel gegenüber dem einfallenden in seinem Querschnitt eine Seitenversetzung erfahren hat. Picht.

Ramberg, E. G.: Abberation correction with electron mirrors. J. appl. Physics, Lancaster Pa. 20, 183—186 (1949).

Es werden zunächst die verschiedenen Methoden, die zur Korrektur der sphärischen bzw. der chromatischen Aberration der Elektronen-Mikroskop-Objektive vorgeschlagen wurden, kurz zusammengestellt, unter denen sich auch die Anwendung des „Elektronen-Spiegels“ befindet, der in mehrfacher Hinsicht besondere Vorteile besitzt. Es wird zunächst noch einmal gezeigt, daß ein ebener Elektronen-Spiegel, d. h. ein gleichförmig verzögerndes Feld geeigneter Feldstärke, tatsächlich geeignet ist, die sphärische und chromatische Aberration einer elektrischen bzw. magnetischen abbildenden Elektronenlinse zu korrigieren. Verf. diskutiert daher diesen Fall genauer, wobei er voraussetzt, daß sich das Objekt selbst etwas innerhalb der Brennweite des Mikroskop-Objektivs befindet und durch das Objektiv hindurch elektronenoptisch „beleuchtet“ wird. Hinter dem Objekt (im Sinne der Beleuchtungsrichtung) befindet sich das als Elektronenspiegel wirkende elektrostatische Feld, dessen Feldverteilung durch $\tanh(\sinh z)$ gegeben ist. Das durch den Spiegel vom Objekt entworfene Bild liegt in der Brennebene des Objektivs. Die Elektronenstrahlen durchsetzen sodann — bevor sie durch das Mikroskopobjektiv gehen — nochmals das Objekt und nach Durchgang durch ein ablenkendes Magnetfeld ein Projektionsobjektiv. Die Abbildungsverhältnisse dieser Anordnung werden eingehend mathematisch behandelt. Picht (Potsdam).

Ramberg, E. G.: Phase contrast in electron microscope images. J. appl. Physics, Lancaster Pa. 20, 441—444 (1949).

Es wird darauf hingewiesen, daß ein dünnes Objekt, das von einem Elektronenstrahlenbündel durchsetzt wird, die Elektronenwelle durch Absorption, Streuung und Phasenänderung der Elektronenwelle beeinflussen kann und daß hierdurch Kontraste im elektronenmikroskopischen Bilde entstehen können. Bei dünnen Objekten ist indessen die Absorption im allgemeinen vernachlässigbar. Auch die Streuung außerhalb der wirkenden Öffnung des Objektivs kann nur verhältnismäßig geringe Kontraste hervorrufen. Dagegen werden gleichzeitig stattfindende Phasenänderungen in der Elektronenwelle beim Durchgang des Objektes im Bilde wahrnehmbare Verlagerungen des Objekttrandes hervorrufen. Ein 100 Angström-Einheiten starker Film eines Materials mit einem inneren Potential von 15 Volt wird z. B. eine Phasenverzögerung von nahezu 90° in einem 5000 Volt-Elektronenbündel hervorrufen. Verf. stellt sich die Aufgabe, diesen

Phasenkontrast am Rande eines Objektes gleichförmiger Dicke zu berechnen. Zu diesem Zwecke überträgt er die aus der Lichtoptik bekannten entsprechenden Untersuchungen auf die Erscheinungen im Elektronenmikroskop. Er bestimmt zunächst den Phasenkontrast im Bilde des Randes eines durchsichtigen Filmes, dessen einzige Wirkung auf das einfallende Elektronenstrahlenbündel die ist, eine bestimmte Phasenänderung hervorzurufen. Er berechnet die Verteilung der Wellenamplitude in der intra- und extrafokalen Bildebene eines vollkommen undurchsichtigen Randes einer gleichfalls undurchsichtigen Halbebene. Die Ergebnisse werden in einer Reihe von Bildern, die die Intensitätsverteilungskurven mit und ohne Berücksichtigung der Phasenbeeinflussung zeigen, wiedergegeben. Entsprechende Überlegungen werden für den Phasenkontrast am Rande eines transparenten Objektes durchgeführt. Die Kurvendarstellungen lassen den Einfluß der Phasenänderung auf den Kontrast im Bilde und die dadurch bedingte Verschiebung des Bildrandes gut erkennen. *Picht (Potsdam).*

Hintenberger, Heinrich: Über magnetische Zylinderlinsen mit korrigiertem Bildfehler. *Z. Naturforsch.* 3a, 125—127 (1948).

Benutzt man homogene magnetische Felder als Zylinderlinsen für Elektronen oder Ionen, so läßt sich durch geeignete Begrenzung der Magnetfelder, d. h. der das Magnetfeld erzeugenden Polschuhe, erreichen, daß die von einem Punkte ausgehenden Strahlen streng wieder in einem Punkte abgebildet werden. Verf. gibt die Gleichungen der beiden Begrenzungslinien der Polschuhe an, die natürlich von der Lage des Objekt- bzw. des Bildpunktes abhängig sind. (Die Streufelder sind in den — nicht näher abgeleiteten — Formeln anscheinend vernachlässigt.) Die vom Verf. angegebenen Formeln für die Polschuhberandung enthalten als Näherungslösungen die geradlinige Begrenzung in Richtung der Tangenten an die genaue Kurve, wobei sich die Cartansche Abbildungsbeziehung ergibt, sowie die von Bainbridge zwecks Verbesserung der Abbildungsgüte angegebenen kreisförmigen Berandungen der Polschuhe. *Picht (Potsdam).*

Hintenberger, Heinrich: Richtungsfokussierung zweiter Ordnung geladener Teilchen in homogenen Magnetfeldern. *Z. Naturforsch.* 3a, 669—670 (1948).

Kurze Mitteilung, unter welcher Bedingung ein divergentes Bündel geladener Teilchen gleicher Energie und Masse, die von einem Punkte ausgehen, nach Ablenkung in einem homogenen Magnetfeld auch in zweiter Ordnung wieder in einem Punkte gesammelt werden. Es wird — vorläufig ohne Ableitung — die Formel angegeben, welchen Bedingungen die Krümmungsradien der Feldgrenzen des konzentrierenden Magnetfeldes genügen müssen, damit jede Fokussierung erster Ordnung zu einer Fokussierung zweiter Ordnung gemacht werden kann. *Picht.*

Atomphysik.

Quantenmechanik:

Durand, Émile: Sur la résolution de l'équation radiale des atomes hydrogénoïdes. *C. r. Acad. Sci., Paris* 230, 273—275 (1950).

Es wird eine neue Methode zur Gewinnung des radialen Anteils der Eigenfunktionen des Wasserstoff-Atoms angegeben. Durch die Anwendung geeigneter Operatoren gelingt dies, ohne die Polynommethode (nach Sommerfeld) zu benutzen. Besonders für die Bildung von Mittelwerten und Erwartungswerten dürfte die Benutzung dieser Operatoren bequemer sein als die Benutzung der expliziten Lösungen. *Wüster (Wuppertal).*

Crawford, M. F. and A. L. Schawlow: Electron-nuclear potential fields from hyperfine structure. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S.* 76, 1310—1317 (1949).

Theoretische Voraussagen über die Beeinflussung der Hyperfeinstruktur durch die Kerngröße werden mit experimentellen Ergebnissen verglichen. Für die ns -Niveaus von Tl III ergibt sich die vorausgesagte Proportionalität zu $(\psi(0))^2$. Die relative Kernradiusänderung bei Zufügung zweier Neutronen ergab sich gleich für Hg II, Tl III, Pb IV. Aus Hyperfeinstrukturmessungen abgeleitete Werte des

magnetischen Kernmoments wichen bei Tl um 15% von durch Induktionsmessungen bestimmten ab. Diese Diskrepanz wurde beseitigt durch eine Korrektur für die endliche Größe des Kerns, wobei entweder gleichförmige Verteilung oder Konzentration der Ladung gegen den Kernrand angenommen wurde. Die Isotopieverschiebung wie der magnetische Effekt weisen darauf hin, daß die Wechselwirkung zwischen Kern und Elektron durch die Coulombsche Wechselwirkung mit einer der genannten Ladungsverteilungen gegeben ist und daß nicht-Coulombsche Kräfte nur eine geringe Rolle spielen.

Kockel (Leipzig).

Marvin, H. H.: Mutual magnetic interactions of electrons. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 71*, 102—110 (1947).

Die Arbeit beschäftigt sich mit der gegenseitigen magnetischen Wechselwirkung der Elektronen bei Atomen mit zwei Leuchtelektronen (z. B. He). Einen Beitrag hierzu liefern die Wechselwirkung zwischen dem Bahnmoment des einen Elektrons mit dem Spin des anderen und die Wechselwirkung der Spinnomente der beiden Elektronen. Die von Heisenberg aufgestellten Operatoren werden ausgewertet. Dabei werden die Matrixelemente für alle Zweielektronenkonfigurationen für *s*, *p* und *d* Elektronen numerisch ausgewertet und die betreffenden Wechselwirkungsintegrale in Tafeln zusammengestellt.

Wüster (Wuppertal).

Sengupta, S.: Theory of doublet spectra under magnetic perturbation. *India J. Physics 23*, 287—300 (1949).

Die Behandlung des Problems erfolgt ohne Benutzung der Diracschen Methode der Aufspaltung der Wellengleichung in zwei Gleichungen erster Ordnung. Der Spin des Elektrons wird dabei als Eigenrotation des Leuchtelektrons beschrieben. Die Spineigenfunktionen sind dann zugeordnete Legendresche Kugelfunktionen der Ordnung 1/2. Mit Hilfe der üblichen Störungsrechnung wird die Änderung der Energieterme und der Eigenfunktionen berechnet, wobei als Störenergien die Energien der Wechselwirkung zwischen dem Spin und Bahnmoment des Elektrons und zwischen dem gesamten Impulsmoment des Elektrons und dem äußeren Magnetfeld eingesetzt werden. Die Ergebnisse für die Energieniveaus und die Auswahlregeln stimmen für die drei behandelten Fälle: a) ohne Feld, b) mit schwachem Magnetfeld und c) mit starkem Magnetfeld (Paschen-Back-Effekt) gut mit den Beobachtungen überein. Als Beispiel werden ferner die Intensitäten der Aufspaltungskomponenten der *D*-Linien des Na-Atoms berechnet. Auch hier ergibt sich gute Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen.

Wüster.

Snyder, Hartland S. and Paul I. Richards: Collision and saturation broadening in microwave spectra. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 73*, 1178—1180 (1948).

Die Form einer stoßverbreiterten Spektrallinie wird berechnet. In Verbindung mit den üblichen Voraussetzungen der Lorentzschen Theorie wird die einfallende Strahlungsintensität als so groß angenommen, daß die Häufigkeit der Strahlungsübergänge eventuell an die der Stoßprozesse herankommt. Dadurch entsteht ein „Sättigungseffekt“ der Absorption und eine zusätzliche Verbreiterung. Um einen bestimmten Effekt zu erreichen, muß die eingestrahlte Intensität proportional dem Quadrat des Druckes gewählt werden.

A. Unsöld (Kiel).

Vleck, J. H. van and Henry Margenau: Collision theories of pressure broadening of spectral lines. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76*, 1211—1214 (1949).

Die Intensitätsverteilung einer druckverbreiterten Spektrallinie wird nach der Lorentzschen Stoßdämpfungstheorie in Emission und Absorption berechnet. Im letzteren Fall muß man die Arbeit des elektrischen Feldes der Lichtwelle während der plötzlichen Lageänderung beim Stoß berücksichtigen. Es wird gezeigt, daß für einen klassischen harmonischen Oszillator und einen langsamen Rotator (Debye) die Form der Spektrallinie in Absorption und spontaner Emission gleich herauskommt, sofern die Strahlungsdichte das Rayleigh-Jeanssche Gesetz befolgt und die Teilchen Boltzmann-Verteilung haben. Während die üblichen Diskussionen ther-

mischen Gleichgewichts zwischen Oszillator und Strahlungsfeld nur die gesamte Ein- und Ausstrahlung in einer Spektrallinie betrachten, wird von den Verff. auch die Energiebilanz für einzelne Frequenzen (die nicht unbedingt bei der Resonanzstelle liegen müssen) angeschrieben. *A. Unsöld (Kiel).*

Balseiro, José A.: Angular momentum of photons. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 71, 79—81 (1947).*

Verf. benutzt die von Born und Heitler herrührende Matrixdarstellung des Drehimpulses eines Strahlungsfeldes, um die ausreduzierten Wellenfunktionen, die zu einem System von zwei Photonen verschiedener Frequenz gehören, nach Drehimpulszuständen geordnet, anzugeben. Auch die Winkelabhängigkeit der Intensitätsverteilung des Zweiphotonenfeldes ist angegeben. *Bauer (München).*

Meixner, Josef: Über den Zusammenhang der Eigenwerte der Heisenbergschen *S*-Matrix mit den stationären Zuständen. *Z. Naturforsch. 3a, 75—78 (1948).*

Bei einem System, das sich durch eine Hamilton-Funktion beschreiben läßt, kann man aus den normierten Eigenfunktionen des kontinuierlichen Spektrums durch analytische Fortsetzung die Eigenwerte und Eigenfunktionen des diskreten Spektrums ermitteln. Diesen Satz, der in der Theorie der Heisenbergschen *S*-Matrix grundlegend ist, hat Verf. bereits in früheren Arbeiten gefunden (dies. Zbl. 7, 15; 10, 43; 16, 427). Er gibt nun eine verschärfte und ausführlichere Darstellung des Beweises, der darauf beruht, daß die Greensche Funktion des Problems (im eindimensionalen Fall) einerseits unmittelbar als Lösung der Schrödinger-Gleichung mit der entsprechenden Singularität, andererseits nach dem Entwicklungssatz durch die Eigenfunktionen des diskreten und kontinuierlichen Spektrums dargestellt wird. *F. Sauter.*

Yukawa, Hideki: On the radius of the elementary particle. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 300—301 (1949).*

Verf. gibt eine neue Darstellung und Interpretation des Bornschen Reziprozitätstheorems, nach welchem die Koordinaten x_μ und Impulse p_μ in einer Theorie der Elementarteilchen in symmetrischer Weise auftreten müssen. Demnach sind die bisher üblichen Beziehungen

$$[x^\mu, p_\nu] = i \hbar \delta_{\mu\nu}, \quad [p_\mu [p^\mu, U]] + m^2 c^2 U = 0$$

zu ergänzen durch die Beziehungen

$$[x_\mu [x^\mu, U]] - \lambda^2 U = 0, \quad [p_\mu [x^\mu, U]] = 0.$$

Dabei bedeutet die eckige Klammer den Kommutator der beiden von ihr umschlossenen Operatoren, U eine skalare Wellenamplitude und λ eine Konstante von der Dimension einer Länge; summiert wird über alle Paare gleicher Indizes. Verf. löst diese Gleichungen in einem Hilbertraum, in dem die Raumkoordinaten auf Hauptachsen sind, und findet für U einen Integralausdruck, welcher als Repräsentant eines Elementarteilchens vom Charakter einer starren Kugel mit dem Radius λ bezeichnet werden kann. — Wie Verf. ferner zeigt, läßt sich diese Erweiterung der Quantenmechanik in analoger Weise auch im Fall eines Diracschen Teilchens durchführen, indem die Beziehung $\gamma^\mu [p_\mu, \psi] + m c \psi = 0$ ergänzt wird durch eine analoge Beziehung $\gamma'_\mu [x^\mu, \psi] + \lambda \psi = 0$. Dabei sind die γ_μ die üblichen Diracschen Operatoren und die γ'_μ entsprechende, ebenfalls einen Vierervektor bildende Größen. *F. Sauter (Göttingen).*

Yukawa, Hideki: Remarks on non-local spinor field. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 1731 (1949).*

Als Nachtrag zur vorstehend referierten Notiz des Verf. werden einige ergänzende Bemerkungen über den Zusammenhang zwischen den Operatoren γ_μ und γ'_μ gemacht. *F. Sauter (Göttingen).*

Kwal, Bernhard: Sur les équations de la théorie des champs spinoriels non localisables. *C. r. Acad. Sci., Paris 230, 276—278 (1950).*

Im Anschluß an die vorsteh. referierten Noten von H. Yukawa versucht Verf.

andere Möglichkeiten, die Diracsche Theorie im Sinn des Reziprozitätstheorems von Born durch Hinzunahme einer zweiten Gleichung zu erweitern. Als heuristisches Prinzip wird dabei die Forderung aufgestellt, daß durch Iteration dieser Gleichungen die Yukawaschen Beziehungen zweiter Ordnung resultieren sollen. Eine Diskussion der so gewonnenen Zusatzbeziehung wird nicht gegeben. *F. Sauter* (Göttingen).

Green, Alex E. S.: On generalizing boson field theories. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 75, 1926—1929 (1949).*

L'A. développe une forme lagrangienne pour les bosons possédant plusieurs masses propres et précise les formes possibles pour les interactions entre fermions résultant de ces champs de bosons généralisés. Partant de la densité de lagrangien $L = (1/2 a^2) \sum_{\sigma} c_{\sigma} a^{2\sigma} Q_{\lambda\sigma} Q_{\lambda\sigma}$ où a est une longueur, $Q_{\lambda\sigma} = \partial_{\lambda_1} \partial_{\lambda_2} \dots \partial_{\lambda_{\sigma}} Q(x^{\nu})$ les équations du mouvement s'écrivent moyennant des conditions physiques acceptables

$$\prod_{\sigma} [\square - (\xi_{\sigma}^2/a^2)] Q(x^{\nu}) = 0,$$

les ξ_{σ}^2 étant racines de l'équation $\sum_{\tau} c_{\tau} (-\xi^2)^{\tau} = 0$. L'hamiltonien se ramène à une

somme pondérée de σ termes analogues à celui que l'on considère dans le cas d'un seul champ de bosons mais avec des masses propres m_{σ} telles que $\xi_{\sigma} = a m_{\sigma} c/\hbar$. La discussion de l'application de ces champs au couplage des fermions montre que l'on peut préciser les formes générales de l'interaction par des principes de correspondance simple avec le cas d'un champ de bosons ordinaire. Dans le cas du couplage des nucléons, il y a équivalence entre un champ de bosons généralisé et les divers mélanges proposés jusqu'ici. La considération d'une théorie de bosons triples ou quadruples permet d'éliminer les principales difficultés rencontrées dans la théorie des forces nucléaires. *G. Petiau* (Paris).

Potier, Robert: Sur les équations d'onde du corpuscule de spin 1/2 à masses multiples. *C. r. Acad. Sci., Paris 227, 1146—1147 (1948).*

Nach Verf. gibt es für jeden vorgegebenen Wert des Gesamtspins eine Folge von Wellengleichungen, welche die Voraussetzungen der Wellenmechanik erfüllen und das Verhalten von Teilchen mit mehrfachen Massen darstellen. Die Anzahl dieser Massen und ihre Größen können willkürlich gewählt werden. In der vorliegenden Note bringt Verf. das einfachste Beispiel für ein solches Gleichungssystem, nämlich ein solches, das ein Teilchen vom Spin $\frac{1}{2}$ mit 2 Massen beschreibt. Wählt man als Lösungsansatz des Gleichungssystems eine ebene Welle, so erhält man als Bedingungsgleichung für die Massen eine quadratische Gleichung, deren Koeffizienten nur so gewählt werden müssen, daß die Massen reell werden. *Kofink* (Stuttgart).

Swann, W. F. G.: The mass-energy relation. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 74, 200—205 (1948).*

Es wird in dieser Arbeit versucht, die Ruhenergie eines Teilchens als kinetische Energie der Bewegung seiner Bestandteile zu deuten. Zu den klassisch behandelten Elementarteilchen treten noch die ebenfalls als klassische Korpuskeln mit verschwindender Ruhmasse behandelten Lichtquanten hinzu. Das benutzte Modell ist mit dem Tröpfchenmodell der Atomkerne zu vergleichen, nur sind im vorliegenden Fall die Bestandteile der Korpuskeln durchaus hypothetisch. Es scheint, daß die Schwierigkeit der Erklärung der Ruhenergie von den Elementarteilchen auf ihre hypothetischen Bestandteile verschoben wird. Die vorliegende Arbeit stellt nur eine kurze, mehr qualitative Zusammenfassung dar. Eine umfassendere Veröffentlichung ist angekündigt. *Wüster* (Wuppertal).

Brogie, Louis de: Sur le calcul de l'énergie et de la quantité de mouvement d'un électron purement électromagnétique. *C. r. Acad. Sci., Paris 228, 1265—1268 (1949).*

Kritische Bemerkungen zu einer Mitteilung von B. Kwal (dies. Zbl. 32, 134). Zunächst gibt Verf. eine Deutung für das von Kwal eingeführte vektorielle Volumenelement: dV^{ν} ist gleich der Projektion des Elementes eines raumartigen Schnittes

der Weltröhre auf eine Hyperebene senkrecht zur x_v -Achse. Es folgt, daß im Falle einer ladungsfreien Weltröhre die Berechnungsmethode B. Kwals und die übliche nach M. Abraham zum gleichen Ergebnis führen. Bei vorhandener Ladung gilt dies jedoch nicht. Der sich ergebende Widerspruch besteht nach Verf. darin, daß ein rein elektromagnetisches Elektron nicht stabil ist, die verwendeten Begriffe Weltröhre und Geschwindigkeit des Elektrons also jeder Grundlage entbehren.

Rinow (Greifswald).

Breit, G. and G.E. Brown: Perturbation methods for Dirac radial equations. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76*, 1307—1310 (1949).

Die Wellengleichung des Schrödingerschen Einteilchenproblems kann oft bequem behandelt werden, indem man die logarithmische Ableitung der radialen Wellenfunktion als abhängige Variable benutzt. Die Verff. behandeln zunächst ein Störungsverfahren für die zwei radialen Funktionen des analogen Diracschen Problems, indem sie deren Quotienten als abhängige Variable einführen. Da der genannte Quotient ∞ werden kann, entwerfen die Verff. ein zweites Störungsverfahren im Anschluß an Milne, indem sie den Quotienten gleich $\operatorname{tg} \varphi$ setzen und φ als abhängige Variable benutzen.

Kockel (Leipzig).

Petiau, Gérard: Sur les relations tensorielles entre densités de valeurs moyennes en théorie de l'électron de Dirac. II. Relations différentielles. *J. Math. pur. appl., Paris, IX. S. 26*, 1—14 (1947).

Verf. leitet die bilinearen Relationen zwischen den 16 Wahrscheinlichkeitsdichten der Diracschen Theorie des Elektrons in Tensorschreibweise nochmals her, welche 1937 vom Ref. in Vektorschreibweise angegeben wurden. Dasselbe gilt von den Bilinearrelationen, die zwischen den Größen der Diracschen Theorie bestehen, welche Differentialquotienten enthalten, d. h. zwischen solchen Größen, die in der Diracschen Theorie analog zum Ausdruck für die Stromdichte in der gewöhnlichen Schrödingerschen Theorie gebildet werden können. Alle diese Beziehungen beruhen auf den Paulischen Relationen zwischen den Matrixelementen im Diracschen Matrixring. Verf. zeigt insbesondere, daß man die Relationen in 5-dimensionaler Schreibweise sehr kurz fassen kann.

Kofink (Stuttgart).

Durand, Émile: Propriétés et applications de 4 matrices nouvelles reliées aux matrices de Dirac. *J. Math. pur. appl., Paris, IX. S. 28*, 1—33 (1949).

Verf. zeigt, daß die 16 Bilinearausdrücke, die man durch Bildung innerer Produkte mit Wellenfunktionen aus den 16 Matrizen des Diracschen Matrixrings bilden kann, sich so in einem quadratischen (4-zeiligen und 4-spaltigen) Schema anordnen lassen wie die Koeffizienten einer Lorentztransformation. Bei geeigneter Normierung erfüllen Zeilen und Spalten dieses Schemas die Orthogonalitätsrelationen, und seine zweireihigen Unterdeterminanten stehen untereinander in einem Zusammenhang, wie es eine Lorentztransformation erfordert. Verf. zeigt, daß die Relationen dieses Schemas die von Pauli 1935 gefundenen und vom Ref. 1937 vervollständigten algebraischen Identitäten zwischen den 16 Wahrscheinlichkeitsdichten der Diracschen Theorie des Elektron sind. Verf. führt weiterhin neue Matrizen ein, die mit denen Diracs verwandt sind, aber etwas andere Vertauschungsrelationen besitzen. Während die Anwendung der Diracmatrizen auf Wellenfunktionen Spinoren ergibt, verleiht die Anwendung der Durandmatrizen Tensorcharakter. Er verallgemeinert mit ihrer Hilfe die Parameter von Olinde Rodrigues und stellt die Elemente der allgemeinen Lorentztransformation durch bilineare Formen dar. Eine Darstellung der Elektrodynamik mit Hilfe der neuen Matrizen und ihre Anwendung in der Wellenmechanik beschließt die Abhandlung.

Kofink (Stuttgart).

Durand, Émile: Recherches sur la théorie de l'électron de Dirac. *J. Math. pur. appl., Paris, IX. S. 28*, 77—135 (1949).

Verf. untersucht allgemein und an Hand zahlreicher Beispiele die Wellenfunktionen, die Dichtegrößen und deren Integrale über den Raum in der Diracschen

Theorie des Elektrons. Bekannte und neue Relationen zwischen den Dichtegrößen, ihren Differentialquotienten und ihren Integralen werden aufgestellt. Soweit möglich, wird deren physikalische Bedeutung diskutiert. *Kofink* (Stuttgart).

Bureau, Florent: *Sur la mécanique ondulatoire de l'électron.* C. r. Acad. Sci., Paris **228**, 465—467 (1949).

Verf. setzt an, daß das Verhalten des Elektrons durch einen Vektor u beschrieben werden kann, dessen n Komponenten Funktionen von x_1 bis x_4 sind, und untersucht, wie weitere Voraussetzungen und die Forderung relativistischer Invarianz zu den Diracschen Gleichungen führen. *Kockel* (Leipzig).

Lévy, Maurice: *La théorie de l'électron de Dirac, dans l'espace des moments.* C. r. Acad. Sci., Paris **229**, 985—987 (1949).

Verf. behandelt die Lösung der Diracschen Gleichung im Impulsraum für das Coulombpotential (s. Rubinowicz, dies. Zbl. **32**, 327). *Kockel* (Leipzig).

• **Gamow, G. and C. L. Cribfield:** *Theory of atomic nucleus and nuclear energy-sources.* 3. ed. (International Series of Monographs on Physics.) London: Oxford University Press, 1949. 344 S. 30 s. net.

Die vorliegende dritte Auflage der Gamowschen Kernphysik trägt die charakteristischen Züge der früheren Auflagen, wenn auch das Buch weitgehend neu geschrieben wurde. Nach einem einführenden Kapitel über allgemeine Kerneigenschaften werden an Hand des Zweiteilchen-Systems die charakteristischen Eigenschaften der Kräfte abgeleitet und Ansätze zum theoretischen Verständnis dieser Kräfte angegeben (S. 1—82). — Der zweite große Abschnitt des Buches befaßt sich mit den natürlichen Eigenschaften der schweren Kerne (S. 83—216). Im einzelnen werden Modellvorstellungen behandelt, dann folgen die verschiedenen Arten des Kernzerfalls einschließlich Kernspaltung. — Der dritte Abschnitt des Buches bringt die erzwungenen Kernreaktionen (S. 217—327), zunächst die Streuprozesse, dann die Prozesse, die die Kernenergie und ihre mögliche Freisetzung unter extremen Bedingungen von Temperatur und Druck demonstrieren. Den Abschluß des Buches bildet ein kurzer Abriss über die Energiegewinnung mittels der Kettenreaktion. — Die Sprache ist im allgemeinen knapp; sonst wäre ein so umfassender Überblick über die heutige Kernphysik nicht in einem einzigen Bande darzustellen gewesen. Die Darstellung befolgt die induktive Methode, die allerdings darunter leidet, daß das Hauptproblem der heutigen Kernphysik, der Kraftansatz, noch offen ist. Das Buch beschränkt sich daher in diesem Teil auf die Wiedergabe der gesicherten qualitativen allgemeinphysikalischen Erkenntnis, ohne die mit der Erfahrung nicht übereinstimmenden Ergebnisse der bisherigen Ansätze im einzelnen durchzudiskutieren. Demzufolge ist das Zweiteilchen-System relativ kurz abgehandelt. Da es gerade hierüber in der angelsächsischen Literatur zwei ausgezeichnete Werke gibt (von Bethe und von Rosenfeld), ist dieses nicht zu bedauern. Der Leser, der sich über Kernphysik im allgemeinen unterrichten will, wird mit der hier gebotenen Darstellung in Anbetracht des heutigen Standes der Wissenschaft sehr zufrieden sein. — Die Kapitel über die schwereren Kerne sind ausführlicher gehalten. So wird der β -Zerfall nach der Theorie von Fermi wie nach der Feldtheorie dargestellt. Eine besonders liebevolle Behandlung haben die Kapitel über Kernumwandlungen unter astrophysikalischem Aspekt erfahren. Der Kohlenstoff- und Wasserstoffzyklus werden ausführlich beschrieben und auch ein Überblick über die Hypothesen zur Entstehung der Elemente gegeben. — Das Buch vermittelt dem Leser einen keineswegs oberflächlichen Einblick in den weiten Bereich der modernen Kernphysik. Es ist neben Vorlesungen wie zum Selbststudium in gleich guter Weise geeignet, wobei allerdings eine gute Kenntnis der Quantenmechanik Voraussetzung ist. Die Anordnung des Stoffes ist übersichtlich, so daß das Buch auch als Nachschlagewerk gute Dienste leisten kann.

K. H. Höcker (Stuttgart).

Rose, M. E.: *Internal pair formation.* Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. **76**, 678—681 (1949).

Die Koeffizienten der inneren Paarerzeugung, die immer dann stattfindet, wenn der Kern eine zur Erzeugung eines Paares ausreichende Anregungsenergie hat, werden für beliebige Multipolordnungen und elektrische sowohl als auch magnetische Übergänge berechnet. Die Eigenfunktionen von Elektron und Positron sind ebene Wellen (Bornsche Näherung). Die Resultate werden bis zur Multipolordnung $l = 5$ graphisch dargestellt. *Touschek* (Glasgow).

Urban, Paul: *Über die Entstehung von Mesonen durch Lichtquanten nach der skalaren Theorie.* Acta physica Austriaca **1**, 167—177 (1947).

Verf. betrachtet den Prozeß, in dem ein Lichtquant auf ein Proton oder Neutron

fällt und dieses sich unter Emission eines Mesons in ein Neutron oder Proton umwandelt, nach der skalaren Theorie. Im Grenzfall kleiner Lichtquantenenergie (klein gegen Ruhenergie des Mesons) zeigt sich eine Abhängigkeit der Richtung stärkster Mesonenemission von der Mesonenmasse, was eventuell (Änderung um $3\frac{1}{2}^\circ$ für Mesonenmasse 0 bis 250) experimentell ausgenutzt werden kann. Verf. zeigt, daß für die von ihm benutzte skalare Yukawa-Theorie der totale Wq. ohne Spezialisierung für große oder kleine Lichtquantenenergie gebildet werden kann, und zeichnet Diagramme für den Wq. in Abhängigkeit von der Lichtquantenenergie für die Mesonenmassen 50, 100, 150 und 200. *Kockel (Leipzig).*

Furry, W. H. and M. Neuman: Interaction of mesons with the electromagnetic field. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 432 (1949).*

Mit Hilfe des Duffin-Kemmerschen Formalismus [Proc. R. Soc., London, A 173, 91 (1939)] wird die Wechselwirkung von Mesonen mit dem elektromagnetischen Feld untersucht. Die Wechselwirkung zwischen dem Meson-Feld und dem Feld der Lichtquanten enthält trilineare und quadrilineare Glieder, deren Willkür durch die Forderungen von Lorentz- und Eichinvarianz stark eingeengt werden kann. Es zeigt sich, daß die Vakuum-Selbstenergie eine Konstante ist, während die Selbstenergie eines einzelnen Mesons divergiert. Die Polarisation des Vakuums wird bestimmt. *Touschek (Glasgow).*

Couteur, K. J. le: The interaction of point particles with charged fields. *Proc. Cambridge philos. Soc. 45, 429—440 (1949).*

Während bisher die Diracsche Behandlung der Wechselwirkung eines Elektrons mit einem elektromagnetischen Feld vollständig nur auf den Fall der Wechselwirkung eines Nukleons mit einem neutralen Mesonenfeld verallgemeinert wurde, gibt Verf. die Erweiterung auf ein nach der symmetrischen Mesonentheorie ladungstragendes Feld an. Dabei wird auch der dipolartige Kopplungsterm mitgerechnet. Es ergeben sich Wirkungsquerschnitte, die sich, wenn man die Strahlungsdämpfung vernachlässigt, an die durch elementare Störungsrechnung erhaltenen anschließen. *Bauer (München).*

Serpe, J.: La théorie convergente de Dirac et le moment magnétique du proton et du neutron. *Bull. Soc. Sci. Liège 16, 38—51 (1947).*

Das magnetische Moment von Proton und Neutron wird für eine ladungssymmetrische Mesonentheorie und mit Hilfe der „konvergenten“ Diracschen Feldtheorie [Proc. R. Soc., London A, 180, 1 (1942)] berechnet. Der Unterschied des Betrages von Proton- und Neutron-Moment läßt sich auf diese Weise nicht erklären.

Touschek (Glasgow).

Petiau, Gérard: Sur l'équation d'ondes non relativiste des corpuscules de spin $\hbar/4\pi$ dans un champ nucléaire général. *C. r. Acad. Sci., Paris 227, 263—264 (1948).*

Verf. stellt die Wellengleichung für ein Diraceteilchen vom Spin $\hbar/4\pi$ und der Ruhmasse m_0 in Wechselwirkung mit einem elektromagnetischen und einem mesonischen Kernfeld auf. Sein mesonisches Kernfeld enthält alle Kernwechselwirkungsweisen, welche die Diracsche Theorie vorsieht: ein Skalar-, ein Vektor-, ein Tensor-, ein Pseudoskalar- und ein Pseudovektorfeld. Er geht unter Zerlegung der relativistischen Wellengleichung in 2 Teilgleichungen in bekannter Weise zur nicht-relativistischen Paulischen Näherung über und führt das elektromagnetische Feld und die den verschiedenen Mesonensorten entsprechenden Mesonenfelder in diese Paulische Näherung ein.

Kofink (Stuttgart).

Petiau, Gérard: Sur les équations d'ondes des corpuscules de spin $\hbar/4\pi$ et leurs solutions dans les champs nucléaires généraux. *J. Physique Radium, VIII. S. 10, 264—276 (1949).*

Diese Arbeit gehört zu den zahlreichen Abhandlungen (z. B. von Breit, Bethe, Schwinger, Caldirola), welche die Suche nach einem die Experimente wiedergebenden Ansatz für die Kernkräfte hervorbrachte. Verf. präzisiert die Ergebnisse

seiner früheren Note (dies. Zbl. 33, 326) und untersucht hier insbesondere den Fall zentralsymmetrischer Wechselwirkungen. Er stellt eine relativistische Wellengleichung für ein Teilchen mit halbzahligem Spin auf, welches allgemeinen Kernkräften unterworfen ist. Diese bestehen in einer Überlagerung von Feldern, die man als Produkte der 16 Operatoren des Diracschen Matrixrings mit kugelsymmetrischen (Potential-)Funktionen bilden kann. Zur Untersuchung seiner Gleichung geht Verf. zunächst in üblicher Weise zur nichtrelativistischen Näherung über und erhält im Falle schwacher Kopplung (d. h. Vernachlässigung sogenannter kleiner Felder gegen den Ruhimpuls des Teilchens) eine verallgemeinerte Pauligleichung, die in der potentiellen und kinetischen Energie spinabhängige Glieder enthält. Um Ausdrücke für die Spin-Bahnkopplung zu gewinnen, betrachtet er 4 Spezialfälle vereinfachter Kernfelder. Ferner untersucht er die Integrale seiner ungekürzten Wellengleichung nach der Diracschen Kommutatormethode und entscheidet, unter welchen Voraussetzungen die Integrale der Diracschen Gleichung des Elektrons auch Integrale seiner verallgemeinerten Gleichung sind. Schließlich separiert er in seinen simultanen Differentialgleichungssystemen Kugelfunktionsteil und Radialteil der Wellenfunktionen nach der Darwinschen Methode. *Kofink* (Stuttgart).

Calkin, J. W.: An elaboration of the Schrödinger formalism with applications to nuclear physics. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 846* (1949).

L'A. expose, dans le cas particulier d'un système de deux particules dont les états de spin sont connus, les principes généraux d'une mécanique ondulatoire des systèmes ne faisant pas intervenir une description détaillée en termes de potentiel des interactions entre les particules mais imposant à la fonction d'ondes des conditions aux limites particulières sur la surface S de la région R de l'espace de configuration dans laquelle s'exercent les interactions entre particules. Dans l'exemple étudié, on montre que les niveaux d'énergie seront déterminés par le système d'équations

$$\begin{aligned} & -(\hbar^2/2m) \nabla^2 \Psi + V \Psi = E \Psi \text{ dans } R, \\ & -(\hbar^2/2m) [d^{-1} (d\Psi/dr) + \nabla_{s^2} \Psi] + W \Psi = E \Psi \text{ sur } S, \end{aligned}$$

d étant une longueur, V un opérateur correspondant par exemple à l'interaction coulombienne, W un opérateur associé aux forces à court rayon d'action. Une extension à l'équation de Dirac est annoncée. *G. Petiau* (Paris).

Guth, Eugene and Charles J. Mullin: Theory of the photo- and electrodisintegration of Be. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 234—244* (1949).

Verff. berechnen die Wirkungsquerschnitte für die Zertrümmerung des Be^9 -Kerns durch Photonen und Elektronen im Energiebereich von 1,6 bis 3 MeV. Als Modell für den Be^9 -Kern benützen sie einen vom Be^8 -Kern erzeugten Potentialtopf, in dessen Kernfeld sich das weitere Neutron des Be^9 bewegt. Als Grundzustand des Be^9 -Kerns nehmen sie den $P_{3/2}$ -Term dieses Modells, von dem aus die eingestrahlten Photonen durch elektrische Dipolübergänge das Neutron in die S - und D -Zustände des Energiekontinuums übergehen lassen. Dies ist möglich, obwohl der Be^8 -Kern selbst in 2 α -Teilchen zerfällt, weil die Lebensdauer des Be^8 -Kerns groß ist gegenüber der Emissionsdauer des weiteren Neutrons aus dem Be^9 . Der Wirkungsquerschnitt der Neutronenemission durch magnetische Dipolübergänge ist nach den Verff. vernachlässigbar; er ist etwa 1/1000 des Wirkungsquerschnitts durch elektrische Dipolübergänge. Bei der Berechnung des Wirkungsquerschnitts der Neutronenemission durch Elektronenstoß benützen die Verff. den Zusammenhang mit jenem der Photoneneinstrahlung, welcher nach Møller in Bornscher Näherung unabhängig von speziellen Annahmen über das Kernmodell besteht.

Kofink (Stuttgart).

Levinger, J. S.: Photoelectric disintegration of the deuteron. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 699—700* (1949).

Der Wirkungsquerschnitt für den Photoeffekt des Deuterons wird berechnet. Die Proton-Neutron-Wechselwirkung ist von der Yukawaschen Form und läßt sich gut durch ein Hulthén-Potential darstellen. Ein solches wird der Berechnung der Eigenfunktion für den Grundzustand des Deuterons zugrunde gelegt. Unter Vernachlässigung der magnetischen Übergänge ergibt sich ein Wirkungsquerschnitt, der etwa 60% höher liegt als der von Bethe und Peierls berechnete. Der Grund liegt in der endlichen Reichweite der Kernkräfte — die Bethe-Peierlssche Rechnung setzt eine im Vergleich zum Radius des Deuterons unendlich kleine Reichweite voraus.

Touschek (Glasgow).

Flügge, Siegfried: Zur Breit-Wigner-Formel. I, II. Z. Naturforsch. **1**, 121—124 (1946), **3a**, 97—104 (1948).

Zu I. Verf. leitet auf systematischem Weg nach der Diracschen Methode der zeitabhängigen Wahrscheinlichkeitsamplituden die Breit-Wigner-Formel für den Einfangquerschnitt eines Atomkerns für langsame Neutronen ab. Der Hamiltonoperator des Gesamtsystems Kern + Neutron soll einen Anfangszustand „Kern und Neutron getrennt“ besitzen; von diesem soll ein Übergang nur zu einem hochangeregten Zwischenzustand, dem Resonanzniveau, möglich sein; vom Zwischenzustand sollen Übergänge zu allen Zuständen des Systems, die unter sich jedoch nicht kombinieren sollen, erlaubt sein. — Zu II. Bei der Existenz mehrerer Resonanzniveaus beim Einfang langsamer Neutronen durch einen Atomkern darf man nicht immer die Einfangquerschnitte der einzelnen Resonanzniveaus addieren. Verf. zeigt, daß vielmehr eine Interferenz der einzelnen Streuquerschnitte auftritt. Liegen die Niveaus in großem Abstand gegenüber den Niveaubreiten, so wird jedes Niveau vom Breit-Wigner-Typ mit wohldefiniertem Einfangquerschnitt und wohldefinierter Breite. Bei Annäherung der Niveaus wird jedoch die Interferenz merklich, welche zu einer Vergrößerung oder Verkleinerung des Wirkungsquerschnitts gegenüber dem addierten Wert führen kann. Bei engen Dubletts kann eine vollständige Verschmelzung auftreten.

Kofink (Stuttgart).

Schwinger, Julian: On the polarization of fast neutrons. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. **73**, 407—409 (1948).

Für die Polarisation von Neutronen wurde vom Verf. [Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. **69**, 681 (1946)] früher die Resonanzstreuung von Neutronen an Helium vorgeschlagen. Die vorliegende Arbeit beschreibt ein 2. Verfahren, das ein Analogon zum Mottscschen Polarisations-effekt an Elektronen darstellt: Beim Durchlaufen des Coulombfelds des Atomkerns erfährt das magnetische Eigenmoment des Neutrons infolge seiner Bewegung ein Drehmoment, welches ihm eine Vorzugsrichtung senkrecht zur Streuebene erteilt. Wellenmechanisch stellt sich die Polarisation dar als ein Interferenzeffekt zwischen der Streuung des Neutrons durch die Kernkräfte und der Zusatzstreuung, die das bewegte Neutron im Coulombfeld des Kerns erfährt.

Diese elektromagnetische Streuung ergibt sich aus einem Zusatzglied $u_k \cdot (e\hbar)/(2M^2c^2) \vec{\sigma} \cdot (\vec{E} \times \vec{p})$ in der Hamiltonfunktion vermittels der Bornschen Näherung. Der Anteil der Kernstreuung wird abgeschätzt mittels des Modells der harten Kugel. Der Erwartungswert der Polarisation steht wieder senkrecht zur Streuebene. Der Betrag der Polarisation ist eine Funktion des Streuwinkels, die bei kleinen Winkeln ein Maximum hat. Das Maximum liegt dort, wo die Amplituden der beiden Streuanteile gleiche Beträge aufweisen. Für die Streuung von 1 MeV-Neutronen an Pb ergibt sich für das Maximum ein Winkel von $1,5^\circ$, wobei praktisch vollständige Polarisation zu erwarten ist. Die experimentellen Schwierigkeiten bei kleinen Streuwinkeln dürften durch die Stärke des Effekts aufgewogen werden. Zum Schluß zeigt Verf., daß zwar die elektromagnetische Streuung bei kleinen Streuwinkeln verhältnismäßig stark ist, daß sie aber wegen des kleinen Winkelbereichs, in dem sie wirksam ist, den Gesamtwirkungsquerschnitt nicht wesentlich verändert.

Volz (Erlangen).

Bothe, W.: Einige einfache Überlegungen zur Rückdiffusion schneller Elektronen. Ann. Physik, VI. F. **6**, 44—52 (1949).

Das Problem der Rückdiffusion schneller Elektronen aus einer dicken, ebenen Wand wird von zwei verschiedenen Seiten in Angriff genommen, und es werden auf diese Weise zwei Näherungslösungen, welche charakteristische Einzelzüge der Erscheinung wiedergeben, gefunden. Da die Theorie der Streuung mit Absorption weitgehend entwickelt ist, wird nach einem von P. Jensen in die Neutronenphysik eingeführten Kunstgriff die Bremsung der Elektronen als

ein Absorptionsvorgang der Atome des Mittels angesehen. Ein Elektron wird als „absorbiert“ betrachtet, wenn seine Energie vom Anfangswert V_0 auf einen bestimmten Wert V abgesunken ist. Die Bahnstrecke, auf der dies geschieht, spielt die Rolle der Absorptionsweglänge $\lambda_a(V_0, V)$. λ_s sei die mittlere Streuweglänge. Die Albedo kann dann aus Ähnlichkeitsgründen nur eine Funktion von λ_a/λ_s sein. Da diese Funktion bisher nur für $\lambda_a \gg \lambda_s$ bestimmt worden ist, benutzt Verf. einen früher in Z. Physik 118, 401–408 (1941); dies. Zbl. 26, 172 unter bestimmten Einfallbedingungen streng berechneten Ausdruck für die Albedo. Die so berechnete Albedo wird für mäßige Elektronengeschwindigkeiten zahlenmäßig ausgewertet, und der Verlauf wird mit den Messungen von Schonland und Kovarik verglichen. Auch die Energieverteilung zeigt mit der experimentell bestimmten (die sich allerdings auf hohe Elektronenenergien bezieht) für Elektronen, die mehr als die Hälfte der Energie verloren haben, quantitative Übereinstimmung. Weiter wird die Winkelausbreitung der Elektronen als Diffusion auf einer Kugelfläche behandelt und mittels der Diffusionsgleichung die Wahrscheinlichkeit dafür bestimmt, daß das Elektron vor Vollendung der Bahnstrecke s umkehrt, d. h. eine Ablenkung größer als $\pi/2$ erreicht hat. Daraus folgt die gesuchte Energieverteilung, wenn man $s = R(V_0) - R(V)$ als bekannt voraussetzt. Für $2/\lambda_s$ wird als Näherung $2/\lambda_s = a(V) = (400/V)^2 Z^2 \varrho/A \text{ cm}^{-1}$ angenommen und für $R(V)$ der Ausdruck $1,25 \cdot 10^{-6} V^2 A/2\varrho \text{ cm}$ der numerischen Auswertung zugrunde gelegt, die mit Messungen P. B. Wagners verglichen wird. Schließlich wird der Einfluß der Einzelstreuung auf die Rückdiffusion diskutiert. Für die Gesamtwahrscheinlichkeit, daß ein Elektron wieder mit der Geschwindigkeit V_0 austritt, ergibt sich $6,1 \cdot 10^{-3} Z$, während die Vielfachstreuung hierfür stets den Wert Null ergibt.

W. Glaser (Wien).

Kołodziejski, R.: Phase-shift formula for many-body collisions. Nature, London 165, 110—111 (1950).

Verf. gibt ein Verfahren an, um die Streuung einer Partikel an einem nahezu radialsymmetrischen System von N Teilchen näherungsweise zu berechnen und dabei die „adiabatische“ Deformation des streuenden Systems zu berücksichtigen. Das Wechselwirkungspotential wird durch ein „effektives“ Potential ersetzt, indem über die Winkelkoordinaten der streuenden Teilchen gemittelt und ein mittlerer Abstand dieser Teilchen vom Zentrum eingeführt wird. Die Schrödinger-Gleichung des $(N+1)$ -Teilchen-Systems läßt sich bei gegebener azimuthaler Quantenzahl der einfallenden Partikel nach der Hartreeschen Methode auf Ein-Teilchen-Gleichungen zurückführen und dann störungstheoretisch behandeln. — Aus dem asymptotischen Verhalten für große Abstände der gestreuten Partikel läßt sich die Phasenverschiebung für unelastische Streuung unter Anregung oder Emission mehrerer Teilchen ermitteln. — Die Formel für elastische Streuung an einem radialsymmetrischen System wird angegeben. — Die Anwendung der Methode auf die elastische Streuung von negativen Mesonen und Neutronen an Deuteronen soll an anderer Stelle veröffentlicht werden.

W. Franz (Münster).

Scott, W. T.: Correlated probabilities in multiple scattering. Physic. Rev., Lancaster Pa., n. II. S. 76, 212—219 (1949).

Bei der Auswertung der Krümmung der Tröpfchenspuren in der Nebelkammer im Magnetfeld ist eine Abschätzung des Fehlers notwendig, den die Vielfachstreuung geladener Teilchen hervorruft. Bethe, Richard-Foy, Fermi und andere haben dieses Problem behandelt. Verf. benützt insbesondere die fundamentale Verteilungsfunktion von Fermi zur Berechnung korrelierter Wahrscheinlichkeiten von Winkel- und Seitenverschiebungen. Er leitet die Ergebnisse obiger Autoren aus einfachen Annahmen über die Streuablenkungen her, ohne wie Bethe, Rose und Smith von der allgemeinen Boltzmannschen Gleichung auszugehen. Er berücksichtigt den Einfluß eines Magnetfeldes senkrecht zur Beobachtungsebene und findet, daß die Krümmung durch das Magnetfeld zu den durch die Streuung hervorgerufenen Krümmungen addiert werden darf. Für die Auswertung von Spuren, die man an 3 Punkten beobachtet, gibt er eine 3-Punktformel; sie ist eine korrelierte Verteilungsfunktion von 2 aufeinander folgenden seitlichen Verschiebungen mit der dabei auftretenden Winkeländerung. Eine 4-Punktformel ermöglicht ihm, die Neigung der Streuspuren zu erklären, lieber kreisförmig als geschraubt oder S-förmig zu erscheinen. Schließlich gibt Verf. eine Formel für die Verteilung der aufeinander folgenden Sehnenwinkel bei einer an vielen Punkten beobachteten Spur. Mit ihrer Hilfe eliminiert er die von der Streuung herrührenden Krümmungsfehler aus den Beobachtungen.

Kofink (Stuttgart).

Snyder, H. S. and W. T. Scott: Multiple scattering of fast charged particles. Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76, 220—225 (1949).

Verff. erweitern die Theorie der Vielfachstreuung geladener Teilchen von Williams, Goudsmit und Saunderson auf Kosten vereinfachender Annahmen: 1. der Streuwinkel sei klein; dies bedeutet hohe Energie der Teilchen und dünne Streuschichten; 2. die Bornsche Näherung sei gültig und das Streupotential sei durch ein abgeschirmtes Coulombpotential des Atoms gegeben; 3. der Energieverlust der Teilchen wird vernachlässigt. Der Hauptzweck der Abhandlung ist,

genau zu bestimmen, wie die Rutherford'sche Weitwinkelstreuung mit der Kleinkwinkelveielfachstreuung zusammenpaßt. Als Nebenergebnis erhalten die Verff. genaue Winkelverteilungen der Streuteilchen für eine große Anzahl von Streufoleindicken. *Kofink* (Stuttgart).

Courant, E. D.: A resonance effect in the synchrotron. *J. appl. Physics*, Lancaster Pa. **20**, 611—616 (1949).

Wenn die Frequenzen der einzelnen Schwingungsarten um die stabile Kreisbahn zueinander kommensurabel sind, werden die Teilchenbewegungen im Synchrotron unstabil. Dies tritt insbesondere ein, wenn der Exponent des Feldabfalles $n = -d \ln H / d \ln r$ gleich $3/4$ ist. Die Frequenz der radialen Oszillation ist dann die Hälfte der Umlauffrequenz. Setzt man voraus, daß der Exponent des Feldabfalles eine schwache azimutale Abhängigkeit zeigt und etwa durch $n - f_1(\theta)$ gegeben sei und $f_1(\theta)$ in einer Fourierreihe vorliege, so zeigt sich, daß dieser Resonanzeffekt zu einem Anwachsen der Amplitude der radialen Schwingungen führt, wenn der erste Fourierkoeffizient von $f_1(\theta)$ zu groß wird. Als Bedingung dafür, daß diese Schwingungen gedämpft bleiben, ergibt sich, daß dieser Fourierkoeffizient für die azimutalen Inhomogenitäten des Magnetfeldes kleiner als etwa 10^{-3} ist. Falls diese Bedingung verletzt ist, wird der Resonanzeffekt die Strahlintensität herabsetzen, wenn sich n in der Umgebung des Wertes $3/4$ befindet. *W. Glaser*.

Reif, Wilhelm: Historische Bemerkungen über den Yukawaschen Potentialansatz. *Acta physica Austriaca* **3**, 270—272 (1949).

Huber, P. und M. Fierz: Berichte über die internationale Tagung für Kernphysik und Quantenelektrodynamik. 1. Tagung in Basel vom 5. bis 9. September 1949. *Z. angew. Math. Physik*, Basel **1**, 74—76 (1950).

Telegdi, V. L.: Berichte über die internationale Tagung für Kernphysik und Quantenelektrodynamik. 2. Tagung in Como vom 11. bis 16. September 1949. *Z. angew. Math. Physik*, Basel **1**, 76—77 (1950).

Bau der Materie:

Koch, O., K.-J. Lesemann und A. Walther: Der radiale Temperaturverlauf im wandstabilisierten Quecksilber-Hochdruckbogen. Instrumentelle Integration der Elenbaas-Hellerschen Differentialgleichung unter Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit des Wärmeleitvermögens. *Z. Physik* **127**, 153—162 (1950).

Die von Elenbaas und Heller 1935 aufgestellte Theorie der wandstabilisierten Hochdruckentladung geht von der Annahme aus, daß die Ionisation eine rein thermische ist und daß sich in jedem Volumenelement die Stromleistung aufteilt in Abstrahlung und Wärmeableitung. Die Temperaturverteilung über den Querschnitt der (zyklischen) Entladung ergibt sich dann aus einer Differentialgleichung, deren Bau im einzelnen abhängt von den Ansätzen für die Teilprozesse, aus denen sich die beiden genannten energieabführenden Mechanismen zusammensetzen. In der vorliegenden Arbeit wird nun die bereits in einer Reihe von Untersuchungen anderer Autoren diskutierte Theorie weiter verfeinert durch eine Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit des Wärmeleitvermögens. Die Differentialgleichung für die radiale Temperaturverteilung lautet hier (θ = Temperatur, q = reduzierter Achsenabstand r/R des Aufpunktes, R = Rohrradius, α , K_1 und θ_w vorgegebene Konstanten)

$$\frac{1}{q} \frac{d}{dq} \left(q \theta^\alpha \frac{d\theta}{dq} \right) + K_1 \theta^{\pm 1/4} e^{-1/2 \theta} - K_2 \theta^{-1} e^{\theta/3} = 0$$

mit den Randbedingungen $d\theta/dq = 0$ für $q = 0$, $\theta = \theta_w$ für $q = 1$. Es ist das eine nichtlineare Differentialgleichung zweiter Ordnung; sie formelmäßig zu lösen, hat sich als unmöglich erwiesen, aber auch eine numerische Lösung ist äußerst langwierig und mühsam. Die Verf. haben hier die Integrationsanlage IPM-Ott [vgl. *Naturwiss.* **36**, 199 (1949)] der Lösung dienstbar machen können, wozu die Differentialgleichung zunächst noch etwas umgeformt wird. Eine kurze Beschreibung der Einstellung der Integrieranlage und des Integrationsverfahrens wird gegeben. Die Integration erfolgt für Achsentemperaturen zwischen 0,05 und 0,07 in Schritten von der Größe 0,004 und für jeweils etwa 6 geeignete Konstantenwerte und erfordert einschließlich der Einstellung der Übersetzungen und Anfangswerte etwa 40 Min. für jede Lösungskurve. Die Ergebnisse sind in zahlreichen Figuren niedergelegt, an die sich eine kurze Diskussion anschließt.

Wie sich zeigt, bringt die Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit des Wärmeleitvermögens eine erhebliche Verbesserung der Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment.

Seeliger (Greifswald).

Fabre de la Ripelle, M.: Étude sur les coefficients spécifiques d'ionisation. *J. Physique Radium*, VIII. S. 10, 319—329 (1949).

Das schon vielfach bearbeitete Problem einer Berechnung der sog. differentiellen Ionisation, d. h. der Zahl von Trägerpaaren, die ein Elektron von konstanter Geschwindigkeit auf 1 cm seines Weges erzeugen würde, wird hier erneut behandelt. Die vorgetragene neuartige Theorie wird angewendet auf die fünf Edelgase und ferner auf Natriumdampf und Wasserstoff, und ergibt eine sehr befriedigende Übereinstimmung zwischen den berechneten und den gemessenen Werten; in Anbetracht der einfachen und sehr allgemeinen Voraussetzungen, von denen die Theorie ausgeht, ist das überraschend und bemerkenswert. — Der Grundgedanke der theoretischen Überlegungen, die mathematisch fast elementar sind und im einzelnen nichts hier Erwähnenswertes enthalten, ist der folgende: Wenn ein freies Elektron gegen ein anderes gebundenes stößt, kann die Bindungsenergie des letzteren vernachlässigt werden. Man kann also die Streuung des freien Elektrons so berechnen, als ob das gebundene Elektron während des Stoßes ebenfalls frei wäre, kann also z. B. die Rutherford'sche Streuformel benutzen. Um die Bindung einzuführen, wird lediglich angenommen, daß sie gelöst wird, also eine Ionisation stattfindet, wenn die auf das gebundene Elektron übertragene Energie einen bestimmten kritischen Schwellenwert überschreitet. Im übrigen benötigt man dann nur noch die Prinzipie von der Erhaltung der Energie und des Impulses. Erwähnt sei noch, daß sich die Methode auch anwenden zu lassen scheint auf die Berechnung der Sekundäremission von Metallen; als Beispiel behandelt Verf. die Emission der *K* Elektronen des Silbers.

Seeliger (Greifswald).

Kohler, Max: Theorie der magnetischen Widerstandseffekte in Metallen. *Ann. Physik*, VI. F. 6, 18—38 (1949).

Die Arbeit des Verf. bezieht sich auf ein spezielles Metall-Modell, bei dem sich ein fast voll mit Elektronen besetztes Band etwas mit einem fast leeren höherliegenden Band überlappt; dabei wird die Abhängigkeit der Energie vom Ausbreitungsvektor in beiden Bändern quadratisch angenommen, und zwar beim tieferen Band gezählt von der oberen Bandkante nach unten, beim höheren Band von der unteren Bandkante nach oben. Für dieses freilich recht spezielle Modell läßt sich die statistische Fundamentalgleichung nach einem seinerzeit von Enskog in der Gastheorie angewandten Verfahren allgemein lösen, worauf sich für den elektrischen und den thermischen Widerstand im transversalen Magnetfeld Näherungsausdrücke angeben lassen. Wegen der Einzelheiten der Rechnung und der ausführlichen Diskussion der Ergebnisse in Hinblick auf die entsprechenden Meßresultate muß auf die Originalarbeit verwiesen werden.

F. Sauter (Göttingen).

Adirovič, Ė. I.: Elektronenzustände in einer gestörten Kristallstruktur. *Doklady Akad. Nauk SSSR*, n. S. 63, 111—114 (1948) [Russisch].

Verf. behandelt quantenmechanisch das folgende System: ein Elektron im Felde einer schwingungsfähigen Doppelschicht ($V = -1$ im Innern einer „atmenden“ Kugel, $V = 0$ außerhalb). Er wendet diese Ergebnisse auf Anionenlücken in polaren Kristallen an, kommt jedoch nicht zu einer quantitativen Abschätzung der Wechselwirkung des Elektrons mit dem Gitter. Eine eingehendere theoretische Behandlung der *F*-Zentren, die zu brauchbaren quantitativen Ergebnissen führt, wurde inzwischen von J. H. Simpson veröffentlicht [*Proc. R. Soc., London*, A 197, 269—281 (1949)].

Höhler (Berlin).

Busch, Georg: Elektronenleitung in Nichtmetallen. I. *Z. angew. Math. Physik*, Basel 1, 3—31 (1950).

Zusammenfassender Bericht.

Torrey, H. C.: Transient nutations in nuclear magnetic resonance. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76*, 1059—1068 (1949).

Experimentelle Überprüfung der Blochschen Theorie betreffend die Schwankungen der magnetischen Kernmomente in einem starken statischen Magnetfeld unter der Wirkung eines Ultrakurzwellen-Wechselfeldes und bei Berücksichtigung eines Dämpfungseinflusses. Aus den Versuchen können einige der in der Blochschen Theorie unbestimmt gebliebenen Konstanten ermittelt werden. *F. Sauter.*

Kittel, Charles: On the gyromagnetic ratio and spectroscopic splitting factor of ferromagnetic substances. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76*, 743—748 (1949).

Bekanntlich ergibt sich aus den gyromagnetischen Versuchen an ferromagnetischen Kristallen ein Landéscher Aufspaltungsfaktor, der etwas kleiner als 2 (entsprechend dem Wert für freie Elektronen) ist. Andererseits führen die Messungen der Ultrakurzwellenabsorption (microwave resonance) auf einen g -Faktor, der etwas größer als 2 ist. Wie Verf. zeigt, müßten diese beiden Faktoren beim Fehlen einer Kopplung zwischen Bahn- und Spindrehimpuls der Elektronen einerseits und dem Gitter des Kristalls andererseits gleich sein. Besteht aber eine solche Wechselwirkung, so wird nach der wellenmechanischen Berechnung des Verf. der gyromagnetische Faktor tatsächlich etwas kleiner als 2, während sich für das Verhältnis dieses Faktors zu dem aus der Absorption bestimmten der Quotient aus dem Spindrehimpuls allein und der Summe aus Spin- und Bahndrehimpuls ergibt. *F. Sauter.*

Döring, Werner: Über die Trägheit der Wände zwischen Weiss'schen Bezirken. *Z. Naturforsch. 3a*, 373—379 (1948).

Da in der Theorie des Ferromagnetismus die einzelnen Elementarmagnete einen Drehimpuls besitzen, muß bei einer Verschiebung einer Wand zwischen zwei Weiss'schen Bezirken ein Drehmoment wirksam sein, welches instande ist, diese Umorientierung der Spinachsen hervorzurufen. Durch eingehende Analyse der Feldverhältnisse im Bereich der Wand zeigt Verf., daß dieses Drehmoment nicht vom äußeren Feld primär herrühren kann. Vielmehr müssen sich bei der Verschiebung in der Wand neue Quellen der Magnetisierung ausbilden; und es läßt sich nun zeigen, daß das dadurch bedingte magnetische Zusatzfeld gerade groß genug ist, um das erforderliche Drehmoment auszuüben. Nun wird aber durch dieses magnetische Zusatzfeld auch die Verteilung der Spins in der bewegten Wand etwas gegenüber der Spinverteilung bei ruhender Wand geändert, so daß, von der Austauschwechselwirkung herrührend, ein additives Zusatzglied zur Wandenergie auftritt. Und dieses Zusatzglied erweist sich als proportional der Wandgeschwindigkeit, so daß man es als eine kinetische Energie der Wand ansprechen kann. Daraus ergibt sich ein bestimmter analytischer Ausdruck für die (scheinbare) Masse der Wand. Verf. schätzt ihren Wert für Eisen ab und findet dafür den Wert $6,0 \cdot 10^{-11}$ g/cm². Es wird ferner gezeigt, daß diese Massenträgheit sich in der Frequenzabhängigkeit der Magnetisierung durch Wandverschiebungen auswirkt. Im besonderen ergibt sich dadurch bei Eisen eine Eigenfrequenz der Wand ungefähr von der Größe $3,5 \cdot 10^9$ sec⁻¹. *F. Sauter (Göttingen).*

Li, Yin-Yuan: Quasi-chemical method in the statistical theory of regular mixtures. *Physic. Rev., Lancaster Pa., II. S. 76*, 972—979 (1949).

Zur statistischen Behandlung binärer Mischkristalle haben T. Alfred und H. Mark [*J. Chem. Phys. 10*, 303 (1942)] Atompaare als Elemente zugrunde gelegt. Verf. legt höhere, als Gruppen bezeichnete Einheiten zugrunde und setzt voraus, daß die verschiedenen Gruppen nicht in Wechselwirkung miteinander stehen (nicht miteinander „interferieren“). Da diese Voraussetzung erst bei größeren Gruppen erfüllt ist, so kann unter Umständen ein Ergebnis (Verteilung der Atome auf die Gitterplätze) im Gleichgewicht dadurch verbessert werden, daß man von einer zunächst betrachteten Gruppe zu einer größeren übergeht. Für die bei verschiedenen Gruppen erzielbare relative Genauigkeit werden Kriterien angegeben. Das Verfahren wird auf die Überstrukturbildung und den Ferromagnetismus angewendet, wobei im zweiten Fall die beiden Spinrichtungen die Unterscheidungsmerkmale der „Atome“ sind. Die Kriterien für die Güte der Näherungen sind dabei die Existenzbereiche dieser Eigenschaften und die Art des Übergangs Unordnung—Ordnung (mit oder ohne latente Wärme). Es werden Vergleiche gezogen zu der früher von C. N. Yang und Y. Y. Li [*J. Chem. Phys. 13*, 66 (1945), *17*, 447 (1949)] benutzten quasichemischen Methode und bemerkt, daß sie implizite dieselben Voraussetzungen macht und zu formal denselben Ergebnissen gelangt wie die statistische Methode. Die Gleichungen für Mischkristalle mit beliebig vielen Atomarten werden angegeben und darauf hingewiesen, daß die ungleiche Löslichkeit einer Art in zwei unmischbaren reinen Phasen und der Ordnungseffekt von Ag₂HgI₄ interessante Beispiele im ternären Fall darstellen. *Kochendörfer.*

Leibfried, Günther: Über die auf eine Versetzung wirkenden Kräfte. Z. Physik 126, 781—789 (1949).

Als Kraftkomponenten K_x, K_y (x Gleitrichtung, y Gleitebenennormale) auf eine zur z -Richtung (\perp zu x und y) parallele Versetzungslinie mit den Mittelpunktskoordinaten $x = \xi, y = \eta$ werden die negativen Gradientenkomponenten der elastischen Energie E nach ξ und η bei festgehaltenen Angriffspunkten der äußeren Kräfte definiert. Es ergibt sich, daß diese nur durch die von den äußeren Kräften hervorgerufenen Spannungen im Versetzungsmittelpunkt bestimmt sind, und zwar ist pro Längeneinheit in der z -Richtung

$$k_x = \lambda p_{xy}^a(\xi, \eta, z), \quad k_y = \lambda p_{xx}^a(\xi, \eta, z),$$

wo λ die durch die Versetzung bewirkte Atomverschiebung (Atomabstand in der Gleitrichtung) bezeichnet. Das ist eine Folge davon, daß die durch die Spannungen der Versetzung selbst bedingten Oberflächenkräfte verschwinden. Bei inneren Spannungen, bei denen die Verschiebungen längs gewisser innerer Oberflächen vorgeschrieben sind, verschwinden die durch die Versetzungsspannungen bewirkten Oberflächenkräfte an den inneren Oberflächen im allgemeinen nicht, weshalb auch die Kräfte auf die Versetzung im allgemeinen nicht nur durch die Spannungswerte in ihrem Mittelpunkt bestimmt sind. Eine Ausnahme bilden z. B. die durch andere Versetzungen bedingten inneren Spannungen. A. Kochendörfer (Stuttgart).

Leibfried, Günther und Horst-Dietrich Dietze: Zur Theorie der Schraubenversetzung. Z. Physik 126, 790—808 (1949).

Bei einer Schraubenversetzung, die in der x -Richtung (senkrecht zur Gleitrichtung in der Gleitebene) verläuft, kann man annehmen, daß nur eine von z unabhängige Verschiebung w in der z -Richtung (Gleitrichtung) vorhanden ist. w gehorcht dann der Gleichung

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

(c Schallgeschwindigkeit für transversale Wellen), welche im statischen Fall für einen unendlich ausgedehnten Kristall die Lösung

$$(1) \quad w = (\lambda/2\pi) a \operatorname{ctg}(x/y)$$

besitzt. Die Singularität im Mittelpunkt ($x = y = 0$) läßt sich nach Peierls beseitigen, indem man in der Gleitebene näherungsweise die atomare Struktur berücksichtigt und die Spannungen periodisch ansetzt. Außerhalb der Gleitebene ergibt sich so genau die elastische Lösung (1). Für einen in der y -Richtung (Gleitebenennormale) endlichen Kristall kann man eine Lösung erhalten durch Superposition der Lösung (1) mit einer regulären Lösung, welche in der Oberfläche gerade die entgegengesetzten Spannungen ergibt wie (1). Man kann aber auch das Spiegelungsverfahren anwenden, das auf die Lösung

$$(2) \quad w = \frac{\lambda}{2\pi} \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\Im g(\pi x/2D)}{\operatorname{tg}(\pi(y-\eta)/2D)} - \operatorname{arctg} \frac{\Im g(\pi x/2D)}{\operatorname{tg}(\pi(x+\eta)/2D)} \right\}$$

führt, in der $y = \eta$ die Lage der Versetzung und $y = 0$ bzw. $y = D$ die der Kristalloberflächen angeben. Mit Hilfe von (2) kann man auch die Peierlsche Lösung für einen endlichen Kristall finden. Die Energie einer Versetzung pro Längeneinheit in der x -Richtung ergibt sich näherungsweise zu

$$E = (\lambda^2 G/4\pi) (1 + \ln(2D/\pi\lambda))$$

Diese Ergebnisse zeigen, daß die Struktur einer Versetzung in ihrer engeren Umgebung für einen endlichen Kristall dieselbe ist wie für einen unendlichen Kristall. Für gleichförmig bewegte Versetzungen (Geschwindigkeit v) bleiben die Lösungen (1) und (2) bestehen, nur ist x durch $(x - vt)/\beta$ mit $\beta^2 = 1 - v^2/c^2$ zu ersetzen. Die Versetzung erfährt also eine „relativistische“ Kontraktion. Auch die Energie ändert sich in entsprechender Weise, es ist $E(v) = E(0)/\beta$, und zwar exakt für die Peierlsche Lösung, näherungsweise für die elastische Lösung. Aus diesen Ergebnissen läßt sich schließen, daß bei fehlender Dämpfung Versetzungen praktisch immer nahezu mit Schallgeschwindigkeit wandern sollten. Für die wirklichen Kristalle ist jedoch anzunehmen, daß bewegte Versetzungen eher das Verhalten von Körpern in zähen Flüssigkeiten zeigen. A. Kochendörfer (Stuttgart).

Frank, F. C. and J. H. van der Merve: One-dimensional dislocations. III. Influence of the second harmonic term in the potential representation on the properties of the model. Proc. R. Soc., London, A 200, 125—134 (1949).

In Erweiterung der früheren Annahme (dies. Zbl. 33, 47), daß das auf die Atome einer linearen Reihe wirkende Potential rein sinusförmig ist, wird ein zweiter harmonischer Term hinzugenommen. Die Lösungen sind auch in diesem Fall durch elliptische Integrale gegeben. Es ergibt sich, daß die Verhältnisse für eine einzelne Versetzung, insbesondere soweit es die Anwendung auf fehlgelagerte monoatomare Schichten und auf das orientierte Aufwachsen betrifft, im wesentlichen dieselben sind, wie bisher, vorausgesetzt, daß der zweite Term so klein ist, daß er kein zweites Minimum bewirkt. Ist der Term so groß, daß ein solches Minimum auftritt, so spaltet eine Versetzung in zwei halbe Versetzungen auf, welche die eindimensionalen Analoga zu den von Shockley betrachteten Halbversetzungen in dichtesten Kugelpackungen sind. Der Gleichgewichtsabstand und die Stabilitätsbedingungen für eine einzige Hälfte werden angegeben. *A. Kochendörfer (Stuttgart).*

Dornberger-Schiff, Käte: Zur Deutung der Röntgendiagramme gewisser Eiweißstoffe. I. Ann. Physik, VI. F. 5, 14—32 (1949).

Die Pattersonanalyse verschiedener Eiweiß-Stoffe ergibt, daß bei einer Änderung des Wassergehalts die Moleküle ungeändert bleiben und sich nur ihre Anordnung ändert. Auf den Röntgenaufnahmen solcher Kristalle entsprechen die unter sehr kleinen Reflexionswinkeln auftretenden Reflexe den intermolekularen, die bei größeren Winkeln auftretenden Reflexe den intramolekularen Abständen. Beim Tabakmosaikvirus haben nun Bernal und Fankuchen zum Teil Aufnahmen mit verwaschenen Reflexen erhalten, deren Aussehen sich mit der Konzentration nicht änderte, zum Teil ähnliche Aufnahmen, auf denen aber die verwaschenen Interferenzen in diskrete Reflexe aufgelöst waren. Sie haben daraus geschlossen, daß die stäbchenförmigen Moleküle senkrecht zu ihrer Längsachse eine Periodizität besitzen müßten. Diese Annahme führt jedoch zu unlösbaren Schwierigkeiten. An Hand einer Diskussion der Methodik der Auswertung solcher Röntgendiagramme kommt Verfasserin zu dem Ergebnis, daß diese Widersprüche nur scheinbar sind und darauf beruhen, daß ein und dieselbe Interferenzzeichnung (und nicht zwei verschiedene wie Bernal und Fankuchen angenommen haben) bei verschiedenem Auflösungsvermögen betrachtet wurde. An Hand dieser Ergebnisse und der elektronenoptischen und chemischen Befunde wird dann gezeigt, daß die von Bernal und Fankuchen sowie von Schramm vorgeschlagenen Modelle nicht zutreffend sein können, und ein Modell vorgeschlagen, bei dem Spiralbänder mit dreizähliger Schraubenachse in hexagonaler Symmetrie ineinandergestellt sind. Die Ganghöhe von 69 Å ist die Gitterkonstante c , der Durchmesser eines Bandes beträgt 300 Å. Durch diese Ineinandersetzung der einzelnen Bänder können wesentliche Erfahrungstatsachen zwanglos gedeutet werden. Die Bedeutung des Modells für die Proteine im allgemeinen wird hervorgehoben. *A. Kochendörfer (Stuttgart).*

Huang, Kun: On the quantum-mechanical treatment of the optics of crystal lattices. Proc. Cambridge philos. Soc. 45, 452—462 (1949).

P. P. Ewald hat 1912 und 1916 [Münchener Dissertation und Ann. Physik, V. F. 49] eine atomistische Theorie des Durchgangs optischer Wellen durch einen Kristall entwickelt und gezeigt, daß die Doppelbrechung erklärt werden kann unter Zugrundelegung eines Modells einer rhombischen Gitteranordnung isotroper Oszillatoren. Sind die Gitterteilchen elektrisch geladen (Ionen), so beeinflussen sie sich in ihren Schwingungen gegenseitig, so daß die ursprüngliche Ewaldsche Theorie nicht ohne weiteres anwendbar ist. M. Born (Atomtheorie des festen Zustandes, 1923) hat für derartige Fälle die Ewaldsche Theorie erweitert, indem er annahm, daß die Gitterschwingungen durch das elektromagnetische Feld zusammen mit anderen, quantenmechanischen Kräften bestimmt sind, die die Gitterteilchen koppeln. Dabei wurde aber die Bewegung der Gitterteilchen entsprechend der klassischen Mechanik behandelt. In einer in Vorbereitung befindlichen Buchveröffentlichung von Born und dem Verf. soll eine Behandlung dieses Problems unter Beachtung der Quantenmechanik erfolgen. Es zeigt sich dabei, daß wesentliche Teile der älteren Bornschen Theorie erhalten bleiben. Zunächst wird in dem Gitter ein elektromagnetisches Feld angenommen, das einer Lösung in der klassischen Theorie entspricht. Die entsprechende gestörte (schwingende) Wellenfunktion des Gitters wird dann mittels der Störungstheorie erhalten. Dabei zeigt sich, daß der Strom in jedem Gitterpunkt — erhalten durch die gestörte Wellenfunktion — genau der gleiche ist, wie er durch die klassische Theorie gegeben ist. In vorliegender Arbeit wird das elektromagnetische Feld in ein longitudinales und ein transversales Feld aufgespalten und das longitudinale Feld als Teil der Gitterkräfte betrachtet, so daß nur das transversale Feld als mit dem Gittersystem in Wechselwirkung stehend betrachtet wird. *Picht (Potsdam).*

Snellman, Olle: On the theory of the magnetic double refraction in non-polar liquids. Philos. Mag., J. theor. exper. appl. Physics, London, VII. S. 40, 983—993 (1949).

Es wird eine vereinfachte Theorie der Doppelbrechung in nicht-polaren Flüssigkeiten gegeben. Dabei wird vorgeschlagen, daß die Langevinsche Theorie für Gase durch zwei Ausdrücke erweitert werden muß, von denen der eine durch die Asymmetrie der Kavitations-Polarisation, der andere durch die Potentialgrenze um das Molekül bedingt ist. Berücksichtigt man diese zusätzlichen Ausdrücke, so stimmen die erhaltenen Ergebnisse — wie der Verf. betont — wesentlich besser mit den experimentell erhaltenen Werten der Doppelbrechung bei Benzin. Während die Polarisationserscheinungen in Dielektriken für polare Flüssigkeiten verhältnismäßig oft behandelt wurden, ist dies für nichtpolare Flüssigkeiten bisher kaum geschehen. Die Clausius-Mosottische Polarisationsformel ist für kleine Änderungen in der Struktur der Flüssigkeiten sehr unempfindlich, da sie durch einfache Mittelung abgeleitet ist. Dies wird einleitend noch etwas näher diskutiert. Die Absicht des Verf. ist es, trotz oder wegen der bisher nur sehr unvollkommenen experimentellen Daten der magnetischen Doppelbrechung in Gasen eine qualitative theoretische Behandlung der Doppelbrechung für nichtpolare Flüssigkeiten unter Berücksichtigung der beiden oben erwähnten Zusatzausdrücke zu geben. *Picht (Potsdam).*

Astronomie. Astrophysik. Geophysik.

Porter, J. G.: The differential correction of orbits. *Monthly Not. astron. Soc., London* 109, 409—420 (1949).

Die Bedingungsgleichungen für die differentielle Verbesserung der Bahnelemente von Kometen oder Planetoiden nach der Methode von Tietjen werden so umgeformt, daß sie für den Gebrauch der Rechenmaschine geeignet sind. Wenn ein Komet in zwei aufeinanderfolgenden Erscheinungen beobachtet wurde, lassen sich nach Berücksichtigung der Störungen in der Zwischenzeit die Beobachtungen so miteinander verbinden, daß ein sehr zuverlässiger Wert für die Verbesserung der mittleren Bewegung gewonnen wird. Die Gleichungen enthalten dann nur drei Unbekannte und führen zu einer sehr einfachen Lösung des Problems. *K. Stumpff (Vogelsang/Harz).*

Merton, G.: A modification of the perturbations-of-elements method. *Monthly Not. astron. Soc., London* 109, 421—435 (1949).

Um die Berechnung spezieller Störungen von Planetoiden und periodischen Kometen bequemer zu gestalten, wird vielfach die Einteilung der Umlaufperiode in eine ganze Anzahl von Abschnitten vorgeschlagen, die gleichen Intervallen der mittleren oder exzentrischen Anomalie entsprechen. Schon Th. v. Oppolzer hat (1870) eine solche Methode benutzt, um die Störungen des Kometen Pons-Winnecke in den neun Umläufen zwischen 1819 und 1869 zu ermitteln. Während v. Oppolzer Intervalle der exzentrischen Anomalie wählt, bevorzugt Verf. auf Grund eines Versuches die mittlere Anomalie. Viele der bei der Störungsrechnung benötigten Ausdrücke lassen sich leicht als Funktionen der mittleren Anomalie und der Exzentrizität darstellen und sich somit für ausgewählte M als Funktion von e in Tafeln bringen. Derartige Tafeln sind von Crommelin und Stracke geschaffen worden. — Gewöhnlich wird die angedeutete Methode als Näherungsverfahren benutzt, indem man mit den oskulierenden Elementen der Ausgangsepoche die Störungen für einen längeren Zeitraum, etwa für einen ganzen Umlauf, berechnet. Verf. zeigt, daß dieses Verfahren in den meisten Fällen zu ungenau ist, aber durch ein beliebig strenges und dabei kaum weniger bequemes ersetzt werden kann. Die Unzulänglichkeiten des Näherungsverfahrens beruht hauptsächlich auf der Unmöglichkeit, die Störungen der mittleren Bewegung genau genug zu bestimmen. In der hier vorgeschlagenen neuen Methode wird die mittlere Anomalie M anstatt der Zeit t als unabhängige Variable eingeführt. Dafür tritt t als gestörte Größe auf. Vorteile dieses Verfahrens sind 1. die Benutzbarkeit der oben genannten Tafeln (oder noch geeigneterer, die Verf. vorschlägt) auch bei strenger Rechnung, 2. der Umstand, daß sich die Störungen in t durch eine einfache Integration ergeben, während die in M bekanntlich ein doppeltes Integral erfordern. Das Rechenschema wird durch sinnvolle Umgestaltung der klassischen Formeln (Bauschinger, Bahnbestimmung der Himmelskörper, Leipzig 1906 und 1928) abgeleitet. *K. Stumpff (Vogelsang/Harz).*

Chandrasekhar, S.: Brownian motion, dynamical friction and stellar dynamics. *Dialectica, Neuchâtel* 3, 114—126 (1949).

Die Grundannahmen der Theorie der Brownschen Bewegung werden kritisch analysiert. Die Kräfte, welche die Moleküle der umgebenden Flüssigkeit auf ein

Brownsches Teilchen ausüben, zerlegt man gewöhnlich in einen systematischen Teil — die dynamische Reibung — und einen Schwankungsanteil. Ersterer wird nach dem Stokesschen Gesetz für den Widerstand einer Kugel berechnet; letzterer kann mit Hilfe eines Diffusionskoeffizienten im Geschwindigkeitsraum beschrieben werden. Der Zusammenhang zwischen den beiden Arten von Prozessen wird üblicherweise hergestellt durch die Forderung der Erhaltung (bzw. bei Störungen, Wiederherstellung) der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung. Daß hierbei nicht auf eine mikroskopische Analyse der einzelnen Stoßprozesse zurückgegriffen wird, erscheint prinzipiell unbefriedigend. — Verf. zeigt nun, daß das analoge Problem der Stelldynamik, Begegnungen zwischen Sternen mit Newtonschen $1/r^2$ -Anziehungskräften, explizit analysiert werden kann. D. h. ausgehend von der Dynamik der einzelnen Begegnungen (Stöße) selbst kann man deren Wirkung aufteilen in eine „dynamische Reibung“ und „statistische Schwankungen“. Für das Verhältnis der Viskosität zu dem erwähnten Diffusionskoeffizienten im Geschwindigkeitsraum ergibt sich ein Wert, der gerade die Erhaltung bzw. Wiederherstellung der Maxwellschen Geschwindigkeitsverteilung garantiert. *A. Unsöld (Kiel).*

Gutman, L. N.: Zur Theorie der Berg-Talwinde. Doklady Akad. Nauk SSSR, n. S. 66, 199—202 (1949) [Russisch].

L'A. se propose d'étudier les mouvements de l'air d'origine thermique au-dessus d'un sol non horizontal, supposé cylindrique. — Il forme à cet effet les équations de l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible, en tenant compte de la force d'inertie due à la rotation de la terre et aussi dans une certaine mesure, de la turbulence; on suppose aussi que le relief du sol (assez tourmenté pour que le problème ne puisse pas être considéré comme uni-dimensionnel) est assez régulier pour que l'emploi de l'hypothèse de la couche limite soit légitime. — Diverses hypothèses supplémentaires (constance de la température du sol, supposé doué de certaines propriétés de symétrie; suppression de certains termes négligeables, etc. . .) permettent de simplifier le problème aux limites dont l'A. forme une solution par approximations successives, sans se préoccuper de la convergence de ce processus.

J. Kravtchenko (Grenoble).

Eckersley, T. L.: Coupling of the ordinary and extraordinary rays in the ionosphere. Proc. phys. Soc. London, Sect. B 63, 49—58 (1950).

Die Untersuchung der Wellenfortpflanzung in einem inhomogenen Plasma gestaltet sich bekanntlich kompliziert und unübersichtlich, wenn auf das Plasma ein Magnetfeld wirkt. Verf. gibt hier eine elegante Näherungslösung. Die Wellengleichung läßt sich für kleinen Gradienten des Brechungsindex lösen durch den Ansatz für die elektrische Feldstärke $E = (dS/dz)^{-1/2} \cdot E_{1,2,3} \exp(2\pi i S - 2\pi i \nu t)$ ($E_{1,2,3}$ sind die drei Komponenten von E , $S = \text{const.}$ sind die Flächen gleicher Phase, das Medium ist aufgebaut in ebenen Schichten senkrecht zur z -Richtung). $Z \sim dS/dz$ ist dann bestimmt durch eine biquadratische Matrix und läßt sich darstellen auf einer vierblättrigen Riemannschen Fläche mit Hilfe einer Funktion, die proportional zur Elektronendichte ist. Mit Ausnahme der Umgebung der Verzweigungspunkte (= Reflexionsstellen) ist diese Darstellung hinreichend genau. Die Diskussion hat sich deshalb in erster Linie mit diesen zu beschäftigen; sie wird durchgeführt für den Fall senkrechter Inzidenz. Das — in diesem Zusammenhang nach Kenntnis des Ref. erstmalig benutzte — Verfahren des Operierens auf einer Riemannschen Fläche ist sicher ein guter und fruchtbarer Gedanke. Physikalisch von Interesse ist insbesondere, daß sich eine Aufspaltung der reflektierten Welle in ein Triplett ergibt, wenn bei senkrechter Inzidenz auch das Magnetfeld ebenfalls senkrecht gerichtet ist. Damit finden Beobachtungen in hinreichend hohen geographischen Breiten eine schöne Erklärung, die von Harang, Meek u. a. mitgeteilt wurden. Bemerkt sei noch, daß die funktionentheoretischen Überlegungen des Verf. durch einige übersichtliche Figuren wirksam erläutert sind. *Seeltiger (Greifswald).*